系　（所）数学与应用数学(试验班)

西 安 交 通 大 学

系 (所) 主任　李东升

批 准 日 期　2017-02-21

毕业设计(论文)任务书

数学与统计学院　院　数学与应用数学(试验班)　系(专业)　数学试验班 31　班　学生　杨金成

毕业设计(论文)课题　剪切流的无粘衰减-半空间与管状空间

毕业设计(论文)工作自　2016　年　11　月　1　日起至　2017　年　6　月　14　日止

毕业设计(论文)进行地点：　校内

课题的背景、意义及培养目标

分层 Couette 流模型出现在大气、海洋等等自然科学领域中。在不考虑热传递与粘性的时候，流体遵循 Euler 方程运动，而它的稳定性一直是科学界最关心的若干问题之一。本题就这样的一个简单的模型，说明流体在一些前提下具有稳定性。

设计(论文)的原始数据与资料

已经细致地研究了在全空间内剪切流的渐近稳定性，并对于不同的 Richardson 数给出了扰动的衰减速率，这是本课题的研究基础。

课题的主要任务

讨论半空间与管状空间中剪切流的渐近稳定性。具体来说，考虑对于稳定解 Couette 流做出微小扰动，扰动在何种正则性要求下会收敛，会以怎样的速率收敛。

课题的基本要求(工程设计类题应有技术经济分析要求)

学习流体稳定性的证明方法，证明半空间与管状空间中剪切流的渐近稳定性。

完成任务后提交的书面材料要求(图纸规格、数量，论文字数，外文翻译字数等)

给出对于稳定解 Couette 流在适当正则性要求下的微小扰动的收敛性，并给收敛率。

翻译文献： Taylor, G. I. 1931 Effect of Variation in Density on the Stability of Superposed Streams of Fluid. Proc. Roy. Soc. (London) A132, 499-523.

主要参考文献

【1】Taylor, G. I. 1931 Effect of Variation in Density on the Stability of Superposed Streams of Fluid. Proc. Roy. Soc. (London) A132, 499-523. 【2】Bedrossian, Jacob; Masmoudi, Nader Inviscid damping and the asymptotic stability of planar shear flows in the 2D Euler equations. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 122 (2015), 195-300. 【3】Lin, Z. & Zeng, C. Inviscid dynamic structures near Couette flow, Arch. Ration. Mech. Anal., 200 (2011), 1075-1097.

指导教师： 李东升

接受设计(论文)任务日期： 2017-02-21

（注：由指导教师填写） 学生签名：

西 安 交 通 大 学

毕业设计(论文)考核评议书

数学与统计学院 院 数学与应用数学(试验班) 系(专业) 数学试验班 31 班级

指导教师对学生 杨金成 所完成的课题为 剪切流的无粘衰减-半空间与管状空间

的毕业设计(论文)进行的情况，完成的质量及评分的意见： 论文研究了具有指数密度分层的 Couette 流在二维半空间与管状空间内的线性稳定性问题，主要证明了在一定正则性的要求下，半空间与管状空间内 Euler 方程在 Sobolev 函数空间中的稳定性与衰减速率；其次论文还给出相应 Hamilton 系统的若干不变量。论文写作认真规范，论述清晰，所得结论正确且有重要理论意义。论文创新性强，是一篇优秀的本科毕业论文。

指导教师建议成绩： 优秀

指导教师 李东升

2017 年 6 月 8 日

毕业设计(论文)评审意见书

评审意见： 该论文研究了具有指数密度分层的 Couette 流在二维半空间与管状空间内的线性稳定性问题，对 Euler 方程的解在 Sobolev 函数空间中的衰减速率进行了相应估计. 论文工作量饱满，论证严密，条理清晰，是一篇非常优秀的本科生毕业设计论文。

评阅教师建议成绩： 优秀

评阅人 贾惠莲 职称 副教授

2017 年 6 月 8 日

毕业设计(论文)答辩结果

____________________院

____________________系(专业)

毕业设计(论文)答辩组对学生________________________所完成的课题为

____

____

的毕业设计(论文)经过答辩,其意见为____________________________________

____

____

____

____

____

____

并确定成绩为____

毕业设计(论文)答辩组负责人__________________

答辩组成员_____________ ________________

_____________ ________________

_____________ ________________

年　　月　　日

论文题目：半空间与管状空间中剪切流的无粘衰减

学生姓名：杨金成

指导教师：李东升

摘 要

本文研究了具有指数密度分层的 Couette 流在二维半空间与管状空间内的线性稳定性问题. 在全空间内, 该问题的渐近稳定性与无粘衰减速率已经得到一个比较完整的分析. 相比于全空间而言, 研究更符合物理背景的半空间内和管状空间内方程的无粘衰减的文献则较少. 本文对于证明半空间与管状空间内 Euler 方程在 Sobolev 函数空间中的稳定性与衰减速率进行了初步尝试. 针对不同情况, 我们分别得到了在一定正则性的要求下的衰减速率与稳定性. 在一定条件下, 速度场在 L^2 意义下会有水平方向 $t^{-\frac{1}{2}+\nu}$, 竖直方向有 $t^{-\frac{3}{2}+\nu}$ 的衰减速率, 或者至少在非周期方向上的投影具有这样的衰减速率. 得到的这些衰减速率与全空间中的结论一致, 尽管它提出了一些不太合理的更高的正则性要求. 对于另一些情形, 有文献证明了流函数不存在衰减. 本文对这样的特征周期解则给出了显式的构造. 之后, 本文阐明了半空间和管状空间的解有着相似的结构. 我们还研究了该 Hamilton 系统的若干不变量, 这为将来的研究工作带来了一些启发. 然而, 这些不变量有无穷多个负方向, 所以无法用来证明方程的非线性稳定性.

关键词：Euler 方程；无粘衰减

Title: Linear Inviscid Damping of a Shear Flow in a Half Space and in a Finite Channel
Name: Jincheng Yang
Supervisor: Dongsheng Li

ABSTRACT

We study the linear stability of an exponentially stratified Couette flow in a half space and in a finite channel. A thorough analysis of the linear asymptotic stability and inviscid damping rate had been carried out for the whole space case. Comparing to the whole space, the study about the half space or the finite channel, which suits better the physics background, are relatively inadequate. This paper makes a naive attempt to show the linear stability and inviscid decay rate of the solutions to Euler equation in the half space and in the finite channel as functions in the Sobolev space. Decay rates of the solutions with certain regularity requirements or stability are obtained under different circumstances. Under certain assumptions, the velocity field has a decay rate in L^2 sense of $t^{-\frac{1}{2}+\nu}$ in the horizontal direction, and $t^{-\frac{3}{2}+\nu}$ in the verticle direction, or at least the projection perpendicular to the neutral spectrum has such decay rates. These rates are basically consistent with the decay rate in the whole space, although some not quite reasonable assumptions must been applied to reach the regularity requirements. For other cases, literature has shown nonexistance of decay for the stream function. We give explicit construction of such periodic eigensolutions. Afterwards, similar structure of the solutions in a half space and in a finite channel are compared. We also studied the Hamiltonian structure and invariants of the system, which brought some inspiration for the study. Unfortunately, all these invariants have infinitely many negative direction, hence they are unable to make any contribution for the proof of nonlinear stability.

KEY WORDS: Euler Equation; Inviscid Damping

目 录

1 绪论

指数分层 Couette 流指的是带有指数密度 $\rho_0(y) = Ae^{-\beta y}$ 的剪切流 $U(y) = Ry$. Taylor[1] 首先使用了固有振动的方式研究了这种流在半空间中的稳定性. 他用一种可信但是却不太完善的方法证明了线性化方程 (现在被称为 Taylor-Goldstein 方程) 的谱在 Richardson 数 $B^2 = \frac{\beta g}{R^2}$ (g 是重力加速度常数) 大于和小于 1/4 时是相当不同的. 他发现当 $B^2 > \frac{1}{4}$ 时, 方程有无穷多个中性本征值. 之后 Dyson[2] 和 Dikii[3] 给出了严格证明. 然而, Taylor 却没有对于 Couette 流的稳定性给出一个明确的结论. 自从上世纪 50 年代开始, 有许多文献从初值问题的角度研究了分层 Couette 流的稳定性, 包括 Høiland[4], Eliassen 等[5], Case[6], Dikii[7], Kuo[8], Hartman[9], Chimonas[10], Brown 与 Stewartson[11], Farrell 与 Ioannou[12]. Yaglom[13] 书的第 3.2.3 节对相关文献有一个比较全面的研究. 大多数文献都使用了 Boussinesq 近似. Dikii[7] 并没有使用这样的近似, 他在半空间下对于任何 $B^2 > 0$ 的 Couette 流, 证明了指数分层 Couette 流的 Lyapunov 稳定性. 我们注意到对于指数分层流 (即 $\rho_0(y) = Ae^{-\beta y}$), 只有当 β 非常小的时候 Boussinesq 近似才能成立. 研究初值问题一个有趣的现象是速度场的无粘衰减. 这种无粘衰减现象最早由 Orr[14] 研究, 他考虑了同质的 Couette 流. Orr 证明了平面同质 Couette 流在水平方向和竖直方向分别有 t^{-1} 与 t^{-2} 的衰减速度. 这种衰减并不是由粘性, 而是由 Couette 流的涡度场混合而造成的. 近年来, 这种无粘衰减的现象引发了新的关注. Lin 与 Zeng[15] 证明了如果在 Sobolev 空间 H^s $\left(s < \frac{3}{2}\right)$ 中考虑初始 (涡度场) 的扰动, 那么非线性的衰减就不能成立了. 他们在 Couette 流附近构造了一个 Kelvin 的 "猫眼" 形的稳态非平行流作为反例. Bedrossian 与 Masmoudi[16] 则证明了 Gevrey 空间 (几乎解析函数空间) 在 Couette 流附近的非线性无粘衰减. 更一般的剪切流的线性无粘衰减也由 Zillinger[17] 与 Wei[18] 等人的工作中考虑过. Yang 与 Lin[19] 则对于全空间中达到最优衰减速度给出了最低的正则性要求.

本文的主要目的是证明指数分层的 Couette 流在半空间与管状空间中的线性稳定性并计算其可能的衰减速率. 这可能对于未来的非线性衰减的研究给出一定的启发. 本文最主要的结论如下: 考虑一个稳态剪切流 $\boldsymbol{v}_0 = (Ry, 0)$ 与指数衰减的密度 $\rho_0(y) = Ae^{-\beta y}$, 其中 $R > 0, A > 0, \beta > 0$ 是常数. 记 Richardson 常数 $B^2 = \frac{\beta g}{R^2}$. 线性化方程为 (见第2.1节)

$$\beta \left[R\partial_x - (\partial_t + Ry\partial_x)\,\partial_y\right]\psi + (\partial_t + Ry\partial_x)\,\Delta\psi = -\partial_x\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)g,, \tag{1-1}$$

$$(\partial_t + Ry\partial_x)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \beta\partial_x\psi. \tag{1-2}$$

其中 ψ 和 ρ 是扰动流函数和扰动密度场. 下面的定理是本文的主要结论.

定理 1.0.1 令 $(\psi(t;x,y),\rho(t;x,y))$ *是方程 (1-1)-(1-2) 在初始条件*

$$\psi(0;x,y)=e^{\frac{1}{2}\beta y}\psi_0(x,y),\ \ \psi_t(0;x,y)=e^{\frac{1}{2}\beta y}\zeta_0(x,y), \tag{1-3}$$

下的解, 其中 $y\in\mathcal{U}_y=\mathbb{R}^+$ *或* $\mathbb{I}=(0,H)$, $x\in\mathbb{T}=[0,L)$ *是* L *周期的. 记速度场* $\boldsymbol{v}=\nabla^{\perp}\psi=(v^x,v^y)$. *下面的记号中,* $f\lesssim g$ *表示* $f\le Cg$, *其中常数* C *只取决于* R,β,g. *我们记* $\langle f\rangle:=\sqrt{1+f^2}$ *并用* $P_{\neq 0}$ *表示往水平方向 (*x *方向) 为常数的 Fourier 项的正交补做投影, 即*

$$P_{\neq 0}f(t;x,y)=f(t;x,y)-\frac{1}{L}\int_0^L f(t;x,y)dx. \tag{1-4}$$

那么

1) 当 $0<B^2<\frac{1}{4}$ *时, 令* $\nu=\sqrt{\frac{1}{4}-B^2}$, $\beta^*=\frac{\beta}{\sqrt{4+\beta^2}}$, *则* $\frac{1}{2}+\nu-\beta^*>0$ *时, 有*

$$\left\|P_{\neq 0}e^{-\frac{1}{2}\beta y}v^x\right\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y)}\lesssim\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}+\nu}\left(\|\psi_0\|_{H_x^1H_y^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}+\|\zeta_0\|_{H_x^1H_y^3(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\right), \tag{1-5}$$

$$\left\|e^{-\frac{1}{2}\beta y}v^y\right\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y)}\lesssim\langle t\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu}\left(\|\psi_0\|_{H_x^1H_y^3(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}+\|\zeta_0\|_{H_x^1H_y^4(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\right), \tag{1-6}$$

如果初始条件 ψ_0 *和* ζ_0 *可以零延拓成全空间中满足上述正则性的函数.*

2) 当 $0<B^2<\frac{1}{4}$ *且* $\frac{1}{2}+\nu-\beta^*\le 0$ *时, 存在有限个振荡的解, 这些振荡的解在* x *方向上有一个最小的共同波长. 而方程的解在这些振荡解张成的补空间上的投影, 有与 1) 中相同的收敛速度.*

3) 当 $B^2>\frac{1}{4}$ *时, 有可数个振荡的解, 因此方程的解中流函数没有衰减, 但是有* L^2 *稳定性.*

定理1.0.1给出了指数分层 Couette 流在半空间或管状空间中 (即 $0<y<+\infty$ 或者 $0<y<H$, x 具有周期性) 的线性衰减. 特别的, 我们可以得到最小正则性在初始扰动下的最佳衰减速率. 在这个问题上, 我们将自己的结果与先前的研究做以比较. 与在 Hartman[9] 中定义的 g_1,g_2 类似, 定理1.0.1(1)-(2) 中的衰减率通过超几何方程的一些特殊解得到. 然而 Hartman[9] 并没有提到一般解可以被这些特殊解表示. Chimonas[10] 考虑了 $B^2<\frac{1}{4}$ 的情况, 得出一个错误的结论: v^y 会以 $t^{2\nu-1}$ 衰减并且 v^x 会以 $t^{2\nu}$ 增加. 之后这个错误被 Brown 与 Stewartson[11] 指出, 并证明了正确的衰减率. 他们通过对时间的 Laplace 变换解决了在解析的初值数据下的初值问题, 并通过解的 Laplace 逆变换的渐近分析得到衰减速率. 再者, 他们还提出了离散的中立特征值是不存在的, 所以解的 Laplace 变换没有奇点. 我们的观点不需要建立在离散中立特征值不存在的前提下, 这与定理1.0.1的推论中阐述的对任意 $B^2>0$ 的衰减率相一致. 这样的对照在半空间中[1][3][2] 和有限管状空间[5] 是十分鲜明的, 因为可以被证明当 $B^2>\frac{1}{4}$ 时是存在无穷个离散的中立特征值. Dikii[7] 对半空间中的解给出了显式的表达, 它们与本文中的解是类似的. 但是 Dikii 只证明了 Lyapunov 稳定性, 而没有对于衰减作出讨论.

最后, 我们简单地叙述一下本文的证明过程. 首先, 我们使用 Fourier 变换和 Laplace

变换在随着背景流平移的坐标系下将原来的 PDE 系统转化为一个二阶线性 ODE. 通解是使用两个超几何函数表示的, 其中齐次方程的解与全空间中的解是相同的, 而非齐次方程的解则是由一个积分方程给出. 接着我们对齐次解和非齐次解分别给出衰减速度的估计.

本文的结构如下. 在第 2 节, 我们导出了线性化方程, 并介绍了超几何函数, 这些在之后会被使用. 在第 3 节, 我们针对半空间的情形, 使用超几何方程解了线性化方程. 并对于 Richardson 数 $B^2 < \frac{1}{4}$ 的情形我们对齐次解和非齐次解分别给出衰减速度的估计. 在第 4 节, 简要地说明了半空间和管状空间的相似性, 进而将半空间的结论扩展到了管状空间中, 并对于 Richardson 数 $B^2 > \frac{1}{4}$ 的情形我们给出了可数个振荡的解, 说明了其稳定性. 第 5 节则从 Hamilton 系统的角度, 分析了其若干个不变量.

2　预备知识

2.1　线性化 Euler 方程组

二维无粘不可压非均质流体满足的方程组称为 Euler 方程组, 它由

$$\rho\left(\partial_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}+\nabla p=\rho\boldsymbol{g}, \tag{2-1}$$

$$\left(\partial_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\rho=0, \tag{2-2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{2-3}$$

三个方程构成, 方程 (2-1) 被称为动量方程, 方程 (2-2) 被称为质量守恒方程, 方程 (2-3) 是不可压缩条件. 方程的自变量 $(t;x,y)$ 中的 $t\in\mathbb{R}$ 是时间, 空间 (x,y) 所在的区域为两个本文中研究的区域: $x\in\mathbb{T}=[0,L)$ 是周期的, $y\in\mathbb{R}^+$ 或者 $y\in\mathbb{I}=(0,H)$ 分别对应于半空间与管状空间. 速度场 $\boldsymbol{v}=(v^x,v^y)$ 与密度场 ρ 是空间 (x,y) 与时间 t 的函数. $\boldsymbol{g}=(0,-g)$ 是方向朝向 y 轴负方向的重力加速度, 其中 g 是重力加速度常数. 最简单的稳态解是剪切流, 即 $\boldsymbol{v}_0=(U(y),0)$ 且 $\rho_0=\rho_0(y)$ 的层流. 由不可压缩条件 (2-3) 可以定义流函数 $\psi=\psi(t;x,y)$, 使得 $\boldsymbol{v}=\nabla^\perp\psi$. 这里 $\nabla^\perp=(-\partial_y,\partial_x)$ 是旋转后的梯度算子. 可以看出流函数不是唯一的, 对于增减一个常数都是容许的.

我们考察的边界条件是 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 是外法向量. 具体的, 对于半空间的情形, 我们要求在直线 $y=0$ 上 $v^y=0$. 对于管状空间的情形, 则要求在直线 $y=0$ 与 $y=H$ 上均有 $v^y=0$. 等价的, 流函数 ψ 的边界条件则是对于半空间有 $\psi(t;x,0)=0$. 对于管状空间, 有 $\psi(t;x,0)=0,\psi(t;x,H)=\psi_H(t)$, 其中 $\psi_H(t)$ 是一个只和 t 有关的函数.

现在我们考虑剪切流 $(\boldsymbol{v}_0,\rho_0)$ 附近的线性化方程. 令 $\boldsymbol{v}=\nabla^\perp\psi$ 与 ρ 分别是速度场和密度场的一个小扰动. 代入原方程, 取出一阶小量, 可以得到线性化的方程组为

$$\rho_0\left[\left(\partial_t+U(y)\partial_x\right)\boldsymbol{v}+\left(v^y\partial_y\right)\boldsymbol{v}_0\right]+\nabla p=\rho\boldsymbol{g}, \tag{2-4}$$

$$\left(\partial_t+U(y)\partial_x\right)\rho+v^y\rho_0'(y)=0. \tag{2-5}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0.$$

取方程 (2-4) 的旋度, 我们得到

$$\begin{aligned}&-\frac{\rho_0'(y)}{\rho_0}\left[U'(y)\partial_x\psi+\left(\partial_t+U(y)\partial_x\right)\left(-\partial_y\psi\right)\right]\\&\qquad+\left(\partial_t+U(y)\partial_x\right)\Delta\psi-U''(y)\partial_x\psi=-\partial_x\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)g.\end{aligned} \tag{2-6}$$

方程 (2-5) 可以被变形成为

$$(\partial_t + U(y)\partial_x)\,\frac{\rho}{\rho_0} = -\partial_x\psi\frac{\rho_0'(y)}{\rho_0}. \tag{2-7}$$

现在考察背景剪切流为指数密度分层的 Couette 流的情形, 即 $U(y) = Ry$, 且 $\rho_0(y) = Ae^{-\beta y}$. 那么方程 (2-6)-(2-7) 变为

$$\beta\left[R\partial_x - (\partial_t + Ry\partial_x)\,\partial_y\right]\psi + (\partial_t + Ry\partial_x)\,\Delta\psi = -\partial_x\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)g, \tag{2-8}$$

$$(\partial_t + Ry\partial_x)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \beta\partial_x\psi. \tag{2-9}$$

当 $R \neq 0$ 时, 记 $B^2 = \frac{\beta g}{R^2}$, 它被称为 Richardson 常数, 再记 $T = \frac{R\rho}{\beta\rho_0(y)}$ 为相对密度扰动, $\omega = -\Delta\psi$ 是速度场扰动, 这样就有

$$-\beta\left[\partial_x - \left(\frac{\partial_t}{R} + y\partial_x\right)\partial_y\right]\psi + \left(\frac{\partial_t}{R} + y\partial_x\right)\omega = B^2\partial_x T, \tag{2-10}$$

$$\left(\frac{\partial_t}{R} + y\partial_x\right)T = \partial_x\psi, \tag{2-11}$$

$$\omega = -\Delta\psi. \tag{2-12}$$

方程组 (2-10)-(2-12) 还是比较复杂的. 许多学者, 包括 Høiland[4], Case[6], Kuo[8], Hartman[9], Chimonas[10], Brown and Stewartson[11], Farrell and Ioannou[12], 都使用了 Boussinesq 近似, 即只考虑密度的变化在含有重力加速度 $\rho\boldsymbol{g}$ 的项上的影响, 在其它的项上则将密度视作常数. 使用 Boussinesq 近似要求密度的变化很小, 大致在一个常数附近变化. 这样, Euler 动量方程变为

$$\bar{\rho}\left(\partial_t\,\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}\right) + \nabla p = \rho\boldsymbol{g}, \tag{2-13}$$

其中 $\bar{\rho}$ 是常数, ρ 是密度的变化. 具有密度 $\rho_0(y)$ 的剪切流 $(U(y), 0)$ 附近的 Boussinesq 方程的线性化方程为

$$(\partial_t + U(y)\partial_x)\,\Delta\psi - U''(y)\partial_x\psi = -\partial_x\left(\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)g, \tag{2-14}$$

$$(\partial_t + U(y)\partial_x)\,\frac{\rho}{\bar{\rho}} = -\partial_x\psi\frac{\rho_0'}{\bar{\rho}}. \tag{2-15}$$

和原 Euler 方程的线性化方程 (2-6) 相比, 这个方程可以被视为 ρ_0'/ρ_0 相对很小的情形, 这样方程 (2-6) 的第一项相对于方程的其它项可以忽略, 并且 ρ_0 可以被常数 $\bar{\rho}$ 代替. 对于指数分层 $\rho_0 = Ae^{-\beta y}$ 的 Couette 流 $U(y) = Ry$, 要想使用 Boussinesq 近似, 需要 β 十分小, 这样就可以近似地有 $\rho_0 \approx A(1-\beta y)$. 这样, 我们考虑带有线性密度变化 $\rho_0(y) = -A\beta y$ 附近的 Couette 流 $(Ry, 0)$, 具有常数的密度背景 $\bar{\rho} = A$. 那么方程

(2-14)-(2-15) 变为

$$(\partial_t + Ry\partial_x)\,\Delta\psi = -\partial_x\left(\frac{\rho}{A}\right)g, \tag{2-16}$$

$$(\partial_t + Ry\partial_x)\left(\frac{\rho}{A}\right) = \beta\partial_x\psi. \tag{2-17}$$

如果 $R \neq 0$, 就记 $B^2 = \frac{\beta g}{R^2}$, $T = \frac{R\rho}{\beta A}$, 则有

$$\left(\frac{\partial_t}{R} + y\partial_x\right)\omega = B^2\partial_x T, \tag{2-18}$$

$$\left(\frac{\partial_t}{R} + y\partial_x\right)T = \partial_x\psi, \tag{2-19}$$

$$\omega = -\Delta\psi. \tag{2-20}$$

2.2 Sobolev 空间

我们研究的空间为 $(x,y) \in \mathcal{U} = \mathbb{T} \times \mathcal{U}_y$, 其中 $\mathcal{U}_y = (0,H)$ 或者 $\mathbb{R}^+$.

首先将函数在 x 方向展成 Fourier 级数. 对于 $f(x,y)$ $(x \in \mathbb{T}, y \in \mathcal{U}_y)$, 定义它的 Fourier 系数为

$$f_k(y) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x,y)e^{-\frac{2\pi ikx}{L}}\mathrm{d}x \tag{2-21}$$

则有逆变换公式

$$f(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(y)e^{\frac{2\pi ikx}{L}}. \tag{2-22}$$

其在 x 方向不为 0 的投影则定义为

$$P_{\neq 0}f(x,y) = \sum_{k\neq 0} f_k(y)e^{\frac{2\pi ikx}{L}}. \tag{2-23}$$

可以注意到 $P_{\neq 0}f$ 在任何固定 y 的条件下对于 x 在 0 到 L 之间的积分为 0. 我们可以由此定义 Sobolev 空间 $H_x^{s_x}H_y^{s_y}(\mathcal{U})$, 包含所有满足下式的函数:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^{s_x}\|f_k\|_{H^{s_y}(\mathcal{U}_y)}^2 < +\infty \tag{2-24}$$

其中 H^{s_y} 是一般的一元函数的 Sobolev 范数. 这样我们定义 $\mathcal{U}$ 上的 Sobolev 范数为

$$\|f\|_{H_x^{s_x}H_y^{s_y}(\mathcal{U})} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^{s_x}\|f_k\|_{H^{s_y}(\mathcal{U}_y)}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2-25}$$

类似的可以定义更一般的 $H_x^{s_x}W_y^{s_y,p}(\mathcal{U})$ 空间, 它包含所有 $H_x^{s_x}W_y^{s_y,p}(\mathcal{U})$ 范数

$$\|f\|_{H_x^{s_x}W_y^{s_y,p}(\mathcal{U})} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(1+k^2\right)^{s_x} \|f_k\|^2_{W^{s_y,p}(\mathcal{U}_y)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2-26}$$

有限的函数.

下面来讨论一下 f_k. 当 $\mathcal{U}_y = \mathbb{R}^+$ 时, 可以使用 Laplace 变换

$$\hat{f}_k(\eta) = \int_0^\infty f_k(y)e^{-i\eta y}\mathrm{d}y, \tag{2-27}$$

有 Laplace 逆变换

$$f_k(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \hat{f}_k(-pi)e^{py}\mathrm{d}p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty-i\gamma}^{\infty-i\gamma} \hat{f}_k(\eta)e^{i\eta y}\mathrm{d}\eta, \tag{2-28}$$

其中 $\gamma \in \mathbb{R}$ 使得 $\hat{f}_k$ 的奇点全部在积分路径的上方.

假定 f_k 是一个在 $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ 上的 H^2 函数, 并假定它满足边界条件 $f_k(0) = 0$, 而且导数连续到边界. 则可以定义它的奇延拓

$$\tilde{f}_k(y) := \operatorname{sgn}(y)f_k(|y|). \tag{2-29}$$

可以证明 $f_k'(|y|)$ 是 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的弱导数, $\operatorname{sgn}(y)f_k''(|y|)$ 是 $f_k'(|y|)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的弱导数. 并且由此得出 $\tilde{f}_k$ 依然有 H^2 的正则性, 即 $\tilde{f} \in H^2(\mathbb{R})$. 并且, $\tilde{f}_k$ 的 Fourier 变换为

$$\int_{-\infty}^\infty \tilde{f}_k(y)e^{-i\eta y}\mathrm{d}y = \int_0^\infty f_k(y)e^{-i\eta y}\mathrm{d}y - \int_0^\infty f_k(y)e^{i\eta y}\mathrm{d}y = \hat{f}_k(\eta) - \hat{f}_k(-\eta). \tag{2-30}$$

事实上,

$$\int_0^\infty f_k(y)e^{-i\eta y}\mathrm{d}y - \int_0^\infty f_k(y)e^{i\eta y}\mathrm{d}y = -2i\int_0^\infty f_k(y)\sin(\eta y)\mathrm{d}y. \tag{2-31}$$

因此有

$$\|f_k\|_{H^2(\mathbb{R}^+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|\tilde{f}_k\right\|_{H^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{-\infty}^\infty \langle\eta\rangle^4 \left|\hat{f}_k(\eta) - \hat{f}_k(-\eta)\right|^2 \mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2-32}$$

当 $\mathcal{U}_y = \mathbb{I} = (0,H)$ 时, 可以使用 $2H$ 周期的 Fourier 级数展开

$$f_k(y) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k(\eta)e^{\frac{\pi i\eta y}{H}}\mathrm{d}\eta, \tag{2-33}$$

其中 Fourier 系数为

$$\hat{f}_k(\eta) = \frac{1}{2H}\int_0^H f_k(y)e^{-\frac{\pi i\eta y}{H}}\mathrm{d}y. \tag{2-34}$$

假定 f_k 是一个在 $\mathbb{I} = (0,H)$ 上的 H^2 函数, 并假定它满足边界条件 $f_k(0) = f_k(H) =$

0, 而且导数连续到边界. 则可以定义它的周期奇延拓: 对任意 $y \in (-H, H), m \in \mathbb{Z}$ 有

$$\tilde{f}_k(y + 2mH) := \operatorname{sgn}(y) f_k(|y|). \tag{2-35}$$

可以证明 $\tilde{f}_k$ 依然有 H^2 的正则性, 即 $\tilde{f} \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. 并且, $\tilde{f}_k$ 的 $2H$ 周期的 Fourier 系数为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2H}\int_{-H}^{H} f_k(y) e^{-\frac{\pi i \eta y}{H}} \mathrm{d}y &= \frac{1}{2H}\int_0^H f_k(y) e^{-\frac{\pi i \eta y}{H}} \mathrm{d}y - \frac{1}{2H}\int_0^H f_k(y) e^{\frac{\pi i \eta y}{H}} \mathrm{d}y \\ &= \hat{f}_k(\eta) - \hat{f}_k(-\eta).\end{aligned} \tag{2-36}$$

事实上,

$$\frac{1}{2H}\int_0^H f_k(y) e^{-\frac{\pi i \eta y}{H}} \mathrm{d}y - \frac{1}{2H}\int_0^H f_k(y) e^{\frac{\pi i \eta y}{H}} \mathrm{d}y = -\frac{i}{H}\int_0^H f_k(y) \sin\left(\frac{\pi \eta y}{H}\right) \mathrm{d}y. \tag{2-37}$$

因此有

$$\|f_k\|_{H^2(\mathbb{I})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\|\tilde{f}_k\right\|_{H^2([-H,H])} = \sqrt{H}\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}} \langle\eta\rangle^4 \left|\hat{f}_k(\eta) - \hat{f}_k(-\eta)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2-38}$$

2.3 超几何函数

Gauss 超几何函数 $F(a, b; c; z)$ 用如下的幂级数定义: 对于 $|z| < 1$,

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{2-39}$$

其中

$$(x)_n = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ x(x+1)\cdots(x+n-1) & n > 0. \end{cases} \tag{2-40}$$

表示向上递乘. $F(z)$ 在 $|z| \geq 1$ 处的值由解析延拓得到. 如果 $c, z \in \mathbb{R}$, 并且 a, b 是共轭复数, 那么 $F(a, b; c; z)$ 也是实值的. 下面的引理被称为 Gauss 连续关系.

引理 2.3.1 *$F(z) = F(a, b; c; z)$ 的导数可以表示为*

$$\frac{dF}{dz} = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z) \tag{2-41}$$

$$= \frac{c-1}{z}\left(F(a, b; c-1; z) - F(a, b; c; z)\right) \tag{2-42}$$

$$= \frac{1}{c(1-z)}\left[(c-a)(c-b) F(a, b; c+1; z) + c(a+b-c) F(a, b; c; z)\right]. \tag{2-43}$$

超几何函数与超几何方程有着密切的联系.

引理 2.3.2 *假定 c 不是整数. 那么 Euler 超几何方程*

$$z(1-z) f''(z) + [c - (a+b+1)z] f'(z) - ab f(z) = 0 \tag{2-44}$$

有两个线性无关的解,

$$f_1(z) = F(a, b; c; z), \tag{2-45}$$

$$f_2(z) = z^{1-c} F(1 + a - c, 1 + b - c; 2 - c; z). \tag{2-46}$$

这两个定理的证明见 Bateman[20] 的第 57 与 74 页.

超几何函数在 $z = 1$ 有一个分支点, 另一个分支点在 $z = \infty$. 默认的连接两个分支点的割线是 $z > 1, z \in \mathbb{R}$. Pfaff 变换可以把一个超几何函数在 $z = 1$ 附近的值与另一个超几何函数在 $z = \infty$ 的值联系起来:

$$F(a, b; c; z) = (1 - z)^{-b} F\left(c - a, b; c; \frac{z}{z - 1}\right), \tag{2-47}$$

$$F(a, b; c; z) = (1 - z)^{-b} F\left(c - a, b; c; \frac{z}{z - 1}\right). \tag{2-48}$$

将它们结合, 即可得到 Euler 变换

$$F(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F\left(c - a, c - b; c; z\right). \tag{2-49}$$

当 $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(a + b)$ 时, 我们有 Gauss 公式

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}. \tag{2-50}$$

当 $\mathrm{Re}(c) < \mathrm{Re}(a + b)$ 时, $F(a, b; c; 1)$ 等于无穷大.

接下来的引理在之后解常微分方程中有重要作用.

引理 2.3.3 *上述两个解的 Wronski 行列式是*

$$W(z) = f_1(z) f_2'(z) - f_1'(z) f_2(z) = (1 - c) z^{-c} (1 - z)^{c-1-a-b}. \tag{2-51}$$

证明. 根据 Liouville's 公式, Euler 超几何方程的 Wronski 行列式可以写成

$$\begin{aligned} W(z) &= C \exp\left(-\int \frac{c - (a + b + 1)z}{z(1 - z)} \mathrm{d}z\right) \\ &= C \exp\left(-\log(1 - z)(a + b + 1 - c) - c \log(z)\right) \\ &= C z^{-c} (1 - z)^{c-1-a-b} = C z^{-c} + O(z^{-c-1}) \end{aligned} \tag{2-52}$$

为了确定常数 C, 只需要计算 $W(z)$ 在 $z = 0$ 处的幂级数展开的首项系数. 根据定义,

$$f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = \frac{ab}{c}, \quad f_2(z) \sim z^{1-c}, \quad f_2'(z) \sim (1 - c) z^{-c} \tag{2-53}$$

当 $z \to 0$, 所以 $C = 1 - c$ 进而 $W(z) = (1 - c) z^{-c} (1 - z)^{c-1-a-b}$. ∎

3 半空间内的情形

从这里开始的几节, 我们讨论在半空间中有背景剪切流时方程的解, 即 $\mathcal{U}_y = \mathbb{R}^+$ 且 $R \neq 0$ 的情形.

3.1 方程的解

在这一节, 我们对 Boussinesq 方程组 (2-18-2-20) 与原始 Euler 方程组 (2-10-2-12) 分别使用 Fourier 变换与 Laplace 变换, 接着对变换后的方程变成关于 t 的二阶线性 ODE, 并使用超几何函数给出显式解. 我们使用随背景剪切流运动的新坐标 $(z, y) = (x - Rty, y)$ 并在这个坐标下定义

$$f(t; z, y) = \omega(t; z + ty, y) = \omega(t; x, y), \tag{3-1}$$

$$\phi(t; z, y) = \psi(t; z + Rty, y) = \psi(t; x, y), \tag{3-2}$$

$$\tau(t; z, y) = T(t; z + Rty, y) = T(t; x, y). \tag{3-3}$$

我们给定初始条件与边界条件如下

$$\phi(0; z, y) = \psi(0; x, y) = \psi_0(x, y), \tag{3-4}$$

$$\phi_t(0; z, y) = \psi_t(0; x, y) = \zeta_0(x, y), \tag{3-5}$$

$$\phi(t; z, 0) = 0. \tag{3-6}$$

3.1.1 带有 Boussinesq 近似的 Euler 方程组的解

在新的坐标 (z, y) 下, 方程 (2-18-2-20) 变为

$$\partial_t f(t; z, y) = (\partial_t + Ry\partial_x)\,\omega(t; x, y) = RB^2 \partial_x T(t; x, y) = RB^2 \partial_z \tau(t; z, y), \tag{3-7}$$

$$\partial_t \tau(t; z, y) = (\partial_t + y\partial_x)\, T(t; x, y) = R\partial_x \psi(t; x, y) = R\partial_z \phi(t; z, y), \tag{3-8}$$

$$\left[\partial_{zz} + (\partial_y - Rt\partial_z)^2\right] \phi(t; z, y) = \psi_{xx} + \psi_{yy} = -\omega(t; x, y) = -f(t; z, y). \tag{3-9}$$

先在 z 方向使用 (2-21) 的 Fourier 级数展开 $z \to k$, 再对 y 方向使用 (2-27) 的 Laplace 变换 $y \to \eta$, 得到

$$\hat{f}_t^k = RB^2 (ik) \hat{\tau}^k, \tag{3-10}$$

$$\hat{\tau}_t^k = R(ik) \hat{\phi}^k, \tag{3-11}$$

$$\left[(ik)^2 + (i\eta - iRkt)^2\right] \hat{\phi}^k = -\hat{f}^k + \phi_y^k(t; 0). \tag{3-12}$$

初始条件与边界条件变为

$$\hat{\phi}^k(0;\eta) = \hat{\psi}_0^k(\eta), \tag{3-13}$$
$$\hat{\phi}_t^k(0;\eta) = \hat{\zeta}_0^k(\eta), \tag{3-14}$$
$$\phi^k(t;0) = 0. \tag{3-15}$$

为方便起见, 在不引起混淆的情形下, 省略上标 k, 即用 $\phi(t;0)$ 表示 $\phi^k(t;0)$, 等等.

将 (3-12) 对 t 求两阶偏导, 依次得到

$$\begin{aligned}&\left[(ik)^2 + (i\eta - iRkt)^2\right]\hat{\phi}_t + 2(i\eta - iRkt)(-iRk)\hat{\phi} = -\hat{f}_t + \phi_{yt}(t;0)\\ =& - RB^2(ik)\hat{\tau} + \phi_{yt}(t;z,0),\end{aligned} \tag{3-16}$$

$$\begin{aligned}&\left[(ik)^2 + (i\eta - iRkt)^2\right]\hat{\phi}_{tt} + 4(i\eta - iRkt)(-iRk)\hat{\phi}_t + 2(-iRk)^2\hat{\phi}\\ =& - \hat{f}_{tt} + \phi_{ytt}(t;0) = -RB^2(ik)\hat{\tau}_t + \phi_{ytt}(t;z,0)\\ =& - R^2B^2(ik)^2\hat{\phi} + \phi_{ytt}(t;0).\end{aligned} \tag{3-17}$$

对于固定的 $k \neq 0$ 和 η, 定义 $s = t - \frac{\eta}{Rk}$, $s_0 = -\frac{\eta}{Rk}$. 我们就得到了一个关于 $\hat{\phi}$ 的二阶线性 ODE

$$\left(\frac{1}{R^2} + s^2\right)\hat{\phi}_{tt} + 4s\hat{\phi}_t + (2 + B^2)\hat{\phi} = \frac{\xi(t)}{R^2k^2}. \tag{3-18}$$

其中

$$\xi(t) = -\phi_{ytt}(t;0). \tag{3-19}$$

记 $\nu = \sqrt{\frac{1}{4} - B^2}$, 则方程 (3-18) 对应的齐次方程 (即将 ξ 用 0 代替得到的方程) 的两个线性无关的解为 (见 Yang 与 Lin[19])

$$\begin{aligned}g_1(s) &= F\left(\frac{3}{4} - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; -R^2s^2\right),\\ g_2(s) &= RsF\left(\frac{5}{4} - \frac{\nu}{2}, \frac{5}{4} + \frac{\nu}{2}; \frac{3}{2}; -R^2s^2\right).\end{aligned}$$

考虑初始条件 (3-13-3-14), 则方程 (3-18) 对应的齐次方程的解为

$$\hat{\phi}_h(t;\eta) = \frac{g_1(s)g_2'(s_0) - g_1'(s_0)g_2(s)}{\Delta(s_0)}\hat{\psi}_0(\eta) - \frac{g_1(s)g_2(s_0) - g_1(s_0)g_2(s)}{\Delta(s_0)}\hat{\zeta}_0(\eta) \tag{3-20}$$

其中

$$\Delta(s_0) = g_1(s_0)g_2'(s_0) - g_1'(s_0)g_2(s_0) = \frac{1}{(1 + R^2s_0^2)^2} \tag{3-21}$$

非齐次方程 (3-18) 在零初始条件 ($\hat{\phi}(0;\eta)=\hat{\phi}_t(0;\eta)=0$) 下的解为

$$\hat{\phi}_i(t;\eta)=\int_0^t \frac{g_1(t_1+s_0)g_2(s)-g_1(s)g_2(t_1+s_0)}{\Delta(t_1+s_0)}\frac{\xi(t_1)}{\left[1+R^2(t_1+s_0)^2\right]k^2}\mathrm{d}t_1 \tag{3-22}$$

$$=\int_{s_0}^s \frac{g_1(s_1)g_2(s)-g_1(s)g_2(s_1)}{\Delta(s_1)\left(1+R^2s_1^2\right)k^2}\xi(s_1-s_0)\mathrm{d}s_1. \tag{3-23}$$

积分 (3-48) 的积分路径是连接 s_0 与 s 的线段. 这样, 非齐次方程 (3-18) 在给定的初始条件 (3-13-3-14) 下的解就可以写成

$$\hat{\phi}(t;\eta)=\hat{\phi}_h(t;\eta)+\hat{\phi}_i(t;\eta) \tag{3-24}$$

所以原方程的解为其 Laplace 逆变换

$$\phi(t;y)=\mathcal{L}^{-1}\left(\hat{\phi}_h(t;\eta)+\hat{\phi}_i(t;\eta)\right) \tag{3-25}$$

因此得到 ξ 满足的方程为

$$\xi(t)=-\left.\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}y\mathrm{d}t^2}\right|_{y=0}\mathcal{L}^{-1}\left(\hat{\phi}_h(t;\eta)+\hat{\phi}_i(t;\eta)\right). \tag{3-26}$$

但是由于此方程比较复杂, 现在还未想到合适的确定 ξ 的解法.

3.1.2 原 Euler 方程组的解

现在我们来解未经 Boussinesq 化简的原始 Euler 方程组的线性化方程 (2-10)-(2-12). 使用本节初定义的 f,ϕ,τ, 方程 (2-10)-(2-12) 变为

$$-\beta\left[R\partial_z-\partial_t\left(\partial_y-Rt\partial_z\right)\right]\phi+\partial_t f=RB^2\partial_z\tau, \tag{3-27}$$

$$\partial_t\tau=R\partial_z\phi, \tag{3-28}$$

$$-\left[\partial_{zz}+\left(\partial_y-Rt\partial_z\right)^2\right]\phi=f. \tag{3-29}$$

经过与上一小节相同的 Fourier 级数展开与 Laplace 变换 $(z,y)\to(k,\eta)$, 方程 (3-27) 变为

$$-\beta\left[iRk-\partial_t\left(i\eta-iRkt\right)\right]\hat{\phi}+\hat{f}_t=RB^2(ik)\hat{\tau}. \tag{3-30}$$

对 t 求偏导, 可以得到

$$-\beta\left[iRk\partial_t-\partial_{tt}\left(i\eta-iRkt\right)\right]\hat{\phi}+\hat{f}_{tt}=RB^2(ik)\hat{\tau}_t. \tag{3-31}$$

代入由方程 (3-28-3-29) 变换得到的

$$\hat{\tau}_t=iRk\hat{\phi}, \tag{3-32}$$

$$\hat{f}=-\left[(ik)^2+(i\eta-iRkt)^2\right]\hat{\phi}+\phi_y(t;0), \tag{3-33}$$

我们有

$$\partial_{tt}\left[k^2+(\eta-Rkt)^2+\beta(i\eta-iRkt)\right]\hat{\phi}-\beta(iRk)\hat{\phi}_t+R^2B^2k^2\hat{\phi}=\xi(t). \tag{3-34}$$

定义 $\chi=e^{-\frac{1}{2}\beta y}\phi$, 那么 $\hat{\phi}(k,\eta)=\hat{\chi}(k,\eta+\frac{1}{2}i\beta)$, 上述方程变形为

$$\partial_{tt}\left[k^2+\left(\eta-\frac{1}{2}i\beta-Rkt\right)^2+\beta\left(i\left(\eta-\frac{1}{2}i\beta\right)-iRkt\right)\right]\hat{\chi}$$
$$-\beta(iRk)\hat{\chi}_t+R^2B^2k^2\hat{\chi}=\xi(t), \tag{3-35}$$

化简后得到

$$\partial_{tt}\left[\frac{1}{4}\beta^2+k^2+(\eta-Rkt)^2\right]\hat{\chi}-i\beta Rk\hat{\chi}_t+R^2B^2k^2\hat{\chi}=\xi(t). \tag{3-36}$$

当 $k\neq 0$ 时, 再次定义 $s=t-\frac{\eta}{Rk}, s_0=-\frac{\eta}{Rk}$, 则有

$$\partial_{tt}\left[\left(\frac{1}{4}\beta^2+k^2+R^2k^2s^2\right)\hat{\chi}\right]-i\beta Rk\hat{\chi}_t+R^2B^2k^2\hat{\chi}=\xi(t). \tag{3-37}$$

定义 $m=\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2+k^2}, \kappa=\frac{Rk}{m}, \beta_1=\frac{\beta}{2m}$, 则有

$$\partial_{tt}\left[\left(m^2+R^2k^2s^2\right)\hat{\chi}\right]-i\beta Rk\hat{\chi}_t+R^2B^2k^2\hat{\chi}=\xi(t), \tag{3-38}$$

$$\partial_{tt}\left[\left(1+\kappa^2s^2\right)\hat{\chi}\right]-2i\beta_1\kappa\hat{\chi}_t+B^2\kappa^2\hat{\chi}=\frac{\xi(t)}{m^2}. \tag{3-39}$$

方程 (3-39) 对应的齐次方程的两个线性无关的解为 (见 Yang 与 Lin[19])

$$g_3(s)=F\left(\frac{3}{2}-\nu,\frac{3}{2}+\nu;2-\beta_1;\frac{1+i\kappa s}{2}\right), \tag{3-40}$$

$$g_4(s)=\left(\frac{1+i\kappa s}{2}\right)^{-1+\beta_1}F\left(\frac{1}{2}+\beta_1-\nu,\frac{1}{2}+\beta_1+\nu;\beta_1;\frac{1+i\kappa s}{2}\right) \tag{3-41}$$

考虑初始条件

$$\hat{\chi}(0;\eta)=e^{-\frac{1}{2}\beta y}\hat{\phi}(0;\eta)=\hat{\psi}_0(\eta), \tag{3-42}$$

$$\hat{\chi}_t(0;\eta)=e^{-\frac{1}{2}\beta y}\hat{\phi}_t(0;\eta)=\hat{\zeta}_0(\eta), \tag{3-43}$$

$$\chi(t;0)=e^{-\frac{1}{2}\beta y}\phi(t;0)=0. \tag{3-44}$$

则方程 (3-39) 对应的齐次方程的解为

$$\hat{\chi_h}(t;\eta)=\frac{g_3(s)g_4'(s_0)-g_3'(s_0)g_4(s)}{\Delta(s_0)}\hat{\psi}_0(\eta)-\frac{g_3(s)g_4(s_0)-g_3(s_0)g_4(s)}{\Delta(s_0)}\hat{\zeta}_0(\eta) \tag{3-45}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta(s_0) &= g_3(s_0)g_4'(s_0) - g_3'(s_0)g_4(s_0) \\ &= \frac{\kappa i}{2}(-1+\beta_1)\left(\frac{1}{2}+\frac{\kappa s_0}{2}i\right)^{-2+\beta_1}\left(\frac{1}{2}-\frac{\kappa s_0}{2}i\right)^{-2-\beta_1},\end{aligned} \tag{3-46}$$

非齐次方程 (3-18) 在零初始条件 ($\hat{\chi}(0;\eta)=\hat{\chi}_t(0;\eta)=0$) 下的解为

$$\hat{\chi}_i(t;\eta) = \int_0^t \frac{g_3(t_1+s_0)g_4(s)-g_3(s)g_4(t_1+s_0)}{\Delta(t_1+s_0)}\frac{\xi(t_1)}{\left[1+\kappa^2(t_1+s_0)^2\right]m^2}\mathrm{d}t_1 \tag{3-47}$$

$$= \int_{s_0}^s \frac{g_3(s_1)g_4(s)-g_3(s)g_4(s_1)}{\Delta(s_1)\left(1+\kappa^2 s_1^2\right)m^2}\xi(s_1-s_0)\mathrm{d}s_1. \tag{3-48}$$

积分 (3-48) 的积分路径是连接 s_0 与 s 的线段. 这样, 非齐次方程 (3-18) 在给定的初始条件 (3-13-3-14) 下的解就可以写成

$$\begin{aligned}\hat{\chi}(t;\eta) &= \hat{\chi}_h(t;\eta)+\hat{\chi}_i(t;\eta) \\ &= \frac{g_3(s)g_4'(s_0)-g_3'(s_0)g_4(s)}{\Delta(s_0)}\hat{\psi}_0(\eta) - \frac{g_3(s)g_4(s_0)-g_3(s_0)g_4(s)}{\Delta(s_0)}\hat{\zeta}_0(\eta) \\ &\quad + \int_{s_0}^s \frac{g_3(s_1)g_4(s)-g_3(s)g_4(s_1)}{\Delta(s_1)\left(1+\kappa^2 s_1^2\right)m^2}\xi(s_1-s_0)\mathrm{d}s_1\end{aligned} \tag{3-49}$$

下面来确定 ξ 的值. 如果 $\chi(t;y)$ 在 $y\to+\infty$ 时增长慢于任何指数函数, 那么 $\hat{\chi}(t;\eta)$ 对于任意 $\mathrm{Im}(\eta)<0$ 都应该是解析的, 即对于 $\mathrm{Im}(s_0)>0$ 解析. 因为 $\Delta(s)$ 在 $s=i\kappa^{-1}$ 处有一个分支点, 同时这个分支点还是 $g_4(s)$ 的一个恰好高一阶的分支点, 所以函数的多值性只可能出现在

$$-\frac{g_3'(s_0)g_4(s)}{\Delta(s_0)}\hat{\psi}_0(\eta)+\frac{g_3(s_0)g_4(s)}{\Delta(s_0)}\hat{\zeta}_0(\eta)+\int_{s_0}^s \frac{g_3(s_1)g_4(s)}{\Delta(s_1)\left(1+\kappa^2 s_1^2\right)m^2}\xi(s_1-s_0)\mathrm{d}s_1 \tag{3-50}$$

这些项中, 即

$$\left(-\frac{g_3'(s_0)}{\Delta(s_0)}\hat{\psi}_0(\eta)+\frac{g_3(s_0)}{\Delta(s_0)}\hat{\zeta}_0(\eta)+\int_{s_0}^s \frac{g_3(s_1)}{\Delta(s_1)\left(1+\kappa^2 s_1^2\right)m^2}\xi(s_1-s_0)\mathrm{d}s_1\right)g_4(s). \tag{3-51}$$

$i\kappa^{-1}$ 是 $g_4(s)$ 的一个分支点, 在这个点附近 $g_4\approx\left[\frac{i\kappa}{2}\left(s-i\kappa^{-1}\right)\right]^{-1+\beta_1}$. 为了使此函数在 $s=i\kappa^{-1}$ 没有多值性, 必须使括号内的表达式等于 0. 因此当 $s=i\kappa^{-1}, s_0=i\kappa^{-1}-t$ 时, 有

$$\int_{s_0}^s \frac{g_3(s_1)}{\Delta(s_1)\left(1+\kappa^2 s_1^2\right)m^2}\xi(s_1-s_0)\mathrm{d}s_1 = \frac{g_3'(s_0)}{\Delta(s_0)}\hat{\psi}_0(\eta)-\frac{g_3(s_0)}{\Delta(s_0)}\hat{\zeta}_0(\eta). \tag{3-52}$$

同时利用 Euler 变换,

$$g_3(s)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\kappa s}{2}i\right)^{-1-\beta_1}F\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu,\frac{1}{2}-\beta_1+\nu;2-\beta_1;\frac{1}{2}+\frac{\kappa s}{2}i\right),\tag{3-53}$$

可以将 $s=i\kappa^{-1},s_0=i\kappa^{-1}-t$ 代入, 得到式 (3-52) 的左侧等于

$$\begin{aligned}&\int_0^t\frac{g_3(s_0+t_1)}{\Delta(s_0+t_1)\left(1+i\kappa(s_0+t_1)\right)\left(1-i\kappa(s_0+t_1)\right)m^2}\xi(t_1)\mathrm{d}t_1\\
=&\int_0^t\left(\frac{1-i\kappa(s_0+t_1)}{2}\right)^{-1-\beta_1}F\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu,\frac{1}{2}-\beta_1+\nu;2-\beta_1;\frac{1+i\kappa(s_0+t_1)}{2}\right)\times\\
&\left(\frac{1-i\kappa(s_0+t_1)}{2}\right)^{2+\beta_1}\left(\frac{1+i\kappa(s_0+t_1)}{2}\right)^{2-\beta_1}\left(\frac{\kappa i}{2}\right)^{-1}(\beta_1-1)^{-1}\times\\
&\frac{1}{\left(1+i\kappa(s_0+t_1)\right)\left(1-i\kappa(s_0+t_1)\right)m^2}\xi(t_1)\mathrm{d}t_1\\
=&\int_0^t\frac{1}{4}F\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu,\frac{1}{2}-\beta_1+\nu;2-\beta_1;\frac{i\kappa(t_1-t)}{2}\right)\times\\
&\left(\frac{i\kappa(t_1-t)}{2}\right)^{1-\beta_1}\left(\frac{\kappa i}{2}\right)^{-1}(\beta_1-1)^{-1}\times\frac{1}{m^2}\xi(t_1)\mathrm{d}t_1\\
=&\frac{1}{4m^2(1-\beta_1)}\left(-\frac{\kappa i}{2}\right)^{-\beta_1}\times\\
&\int_0^t(t-t_1)^{1-\beta_1}F\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu,\frac{1}{2}-\beta_1+\nu;2-\beta_1;-\frac{i\kappa}{2}(t-t_1)\right)\xi(t_1)\mathrm{d}t_1\end{aligned}\tag{3-54}$$

注意到此时有 $\eta=-Rks_0=-m\kappa(i\kappa^{-1}-t)=-im(1+i\kappa t)$, 因此有

$$\begin{aligned}\frac{g_3'(s_0)}{\Delta(s_0)}\hat{\psi}_0(\eta)=&-\frac{\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{(1-\beta_1)(2-\beta_1)}\left(-\frac{i\kappa t}{2}\right)^{2-\beta_1}\left(1+\frac{i\kappa t}{2}\right)^{2+\beta_1}\times\\
&F\left(\frac{5}{2}-\nu,\frac{5}{2}+\nu;3-\beta_1;-\frac{i\kappa t}{2}\right)\hat{\psi}_0\left(-im(1+i\kappa t)\right)\end{aligned}\tag{3-55}$$

$$\begin{aligned}\frac{g_3(s_0)}{\Delta(s_0)}\hat{\zeta}_0(\eta)=&-\frac{2}{i\kappa(1-\beta_1)}\left(-\frac{i\kappa t}{2}\right)^{2-\beta_1}\left(1+\frac{i\kappa t}{2}\right)^{2+\beta_1}\times\\
&F\left(\frac{3}{2}-\nu,\frac{3}{2}+\nu;2-\beta_1;-\frac{i\kappa t}{2}\right)\hat{\zeta}_0\left(-im(1+i\kappa t)\right)\end{aligned}\tag{3-56}$$

所以

$$\int_0^t K(t-t_1)\xi(t_1)\mathrm{d}t_1=K_1(t)\hat{\psi}_0\left(-im(1+i\kappa t)\right)+K_2(t)\hat{\zeta}_0\left(-im(1+i\kappa t)\right),\tag{3-57}$$

其中

$$K(t)=t^{1-\beta_1}F\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu,\frac{1}{2}-\beta_1+\nu;2-\beta_1;-\frac{i\kappa}{2}t\right), \tag{3-58}$$

$$K_1(t)=\frac{m^2\kappa^2\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{(2-\beta_1)2^{2+\beta_1}}t^{2-\beta_1}\left(2+i\kappa t\right)^{2+\beta_1}F\left(\frac{5}{2}-\nu,\frac{5}{2}+\nu;3-\beta_1;-\frac{i\kappa t}{2}\right), \tag{3-59}$$

$$K_2(t)=\frac{m^2 i\kappa}{2^{1+\beta_1}}t^{2-\beta_1}\left(2+i\kappa t\right)^{2+\beta_1}F\left(\frac{3}{2}-\nu,\frac{3}{2}+\nu;2-\beta_1;-\frac{i\kappa t}{2}\right). \tag{3-60}$$

这是一个关于 $\xi(t)$ 的第一类 Volterra 积分方程.

由于它的积分核是一个特殊的超几何函数, 可以使用 Laplace 变换来解该方程. $K(t)$ 的 Laplace 变换 $t\to\sigma$ 为

$$\mathcal{L}(K)(\sigma)=\int_0^\infty K(t)e^{-\sigma t}\mathrm{d}t=\Gamma(2-\beta_1)\left(\frac{i\kappa}{2}\right)^{\beta_1}\sigma^{-2}e^{-\frac{i\sigma}{\kappa}}W_{\beta_1,\nu}\left(2e^{-\frac{i\pi}{2}}\frac{\sigma}{\kappa}\right) \tag{3-61}$$

其中 $W_{\beta_1,\nu}$ 是 Whittaker 函数. 定义

$$\begin{aligned}K^{inv}(t)&=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\mathcal{L}(K)(\sigma)}\right)\\&=\left[\Gamma(2-\beta_1)\left(\frac{i\kappa}{2}\right)^{\beta_1}\right]^{-1}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\sigma^2e^{\sigma t}\mathrm{d}\sigma}{e^{-\frac{i\sigma}{\kappa}}W_{\beta_1,\nu}\left(2e^{-\frac{i\pi}{2}}\frac{\sigma}{\kappa}\right)},\end{aligned} \tag{3-62}$$

进而得出

$$\xi(t)=\int_0^t K^{inv}\left(t-t_1\right)\Big(K_1(t_1)\hat{\psi}_0\left(-im(1+i\kappa t_1)\right)+K_2(t_1)\hat{\zeta}_0\left(-im(1+i\kappa t_1)\right)\Big)\mathrm{d}t_1. \tag{3-63}$$

将它代入 (3-49), 即可得到在 Fourier 级数与 Laplace 变换下的解 $\hat{\chi}_i$.

从积分式 (3-62) 可以看出, Whittaker 函数 $W_{\beta_1,\nu}$ 的零点决定了积分是否会有衰减. 根据 Bateman[20], 当 $B^2>\frac{1}{4}$ 时, $W_{\beta_1,\nu}$ 有无穷个零点. 当 $B^2<\frac{1}{4}$ 时, $W_{\beta_1,\nu}$ 有一个或者没有零点, 取决于 $\frac{1}{2}+\nu-\beta\geq 0$ 或 <0. 因此, 我们分 $B^2<\frac{1}{4}$ 与 $B^2>\frac{1}{4}$ 两种情形进行讨论.

3.2 $B^2<\frac{1}{4}$ 时解的估计

在这一节, 我们分别对 χ_i 和 χ_h 的大小给出估计, 进而对于函数的解的大小给出一个估计.

考虑到证明的连续性, 我们先接着上一节对得到的非齐次解 χ_i 给出大小估计.

3.2.1　非齐次解 χ_i 的大小估计

上一节的最后说明了积分式 (3-62) 中的 Whittaker 函数 $W_{\beta_1,\nu}$ 在 $B^2 < \frac{1}{4}$ 时, $W_{\beta_1,\nu}$ 有一个或者没有零点, 取决于 $\frac{1}{2}+\nu-\beta_1 \le 0$ 或 > 0. 要想对于所有的 k 都没有零点, 只需要 $k=1$ 的时候有 $\frac{1}{2}+\nu-\beta_1 > 0$ 即可, 这时 $\beta_1 = \beta^* = \frac{\beta}{\sqrt{4+\beta^2}}$. 如若 $\frac{1}{2}+\nu-\beta^* \le 0$, 则对于有限个小的 k 存在零点, 而除去这些可能的零点的留数以外, 可以把积分路径变为围绕实轴负半轴的折线, 可以得出

$$K^{inv}(t) = C\kappa^{-\frac{5}{2}-\nu}t^{-\frac{5}{2}-\nu} + O\left[(\kappa t)^{-\frac{5}{2}-3\nu}\right] \tag{3-64}$$

随着 $t \to \infty$, 其中

$$C = \frac{\Gamma(\frac{5}{2}+\nu)\Gamma(\frac{1}{2}+\nu-\beta_1)}{2^{\frac{1}{2}-\nu}\Gamma(2\nu)\Gamma(2-\beta_1)}\left(e^{\left(\frac{3}{4}-\frac{3\nu}{2}\right)i} - e^{-\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}\right)i}\right)\left(\frac{i\kappa}{2}\right)^{-\beta_1} \tag{3-65}$$

注意到

$$|K^{inv}(t)| \lesssim \langle \kappa t\rangle^{-\frac{5}{2}-\nu}, \tag{3-66}$$

$$|K_1(t)| \lesssim m^2\kappa^2 t^{2-\beta_1}\langle \kappa t\rangle^{-\frac{1}{2}+\nu+\beta_1}, \tag{3-67}$$

$$|K_2(t)| \lesssim m^2\kappa t^{2-\beta_1}\langle \kappa t\rangle^{\frac{1}{2}+\nu+\beta_1}. \tag{3-68}$$

因为当 k 是下有界的 ($|k| \ge 1$), κ 是一致远离 0 的, 就有

$$|K^{inv}(t)| \lesssim \langle t\rangle^{-\frac{5}{2}-\nu}, \tag{3-69}$$

$$|K_1(t)| \lesssim k^2\langle t\rangle^{\frac{3}{2}+\nu}, \tag{3-70}$$

$$|K_2(t)| \lesssim k^2\langle t\rangle^{\frac{5}{2}+\nu}. \tag{3-71}$$

假定 $\psi_0 e^{-my} \in H_y^\sigma(\mathbb{R})$ 对于某个 $\sigma > 0$ 成立 (在 $y < 0$ 的时候零延拓), 就会有估计

$$\begin{aligned}
&\int_0^t K^{inv}(t-t_1)K_1(t_1)\hat{\psi}_0(-im(1+i\kappa t_1))\,\mathrm{d}t_1 \\
&= \int_0^t K^{inv}(t-t_1)K_1(t_1)\widehat{\psi_0 e^{-my}}(m\kappa t_1)\mathrm{d}t_1 \\
&= \int_0^t K^{inv}(t-t_1)K_1(t_1)\langle m\kappa t_1\rangle^{-\sigma}\langle m\kappa t_1\rangle^{\sigma}\widehat{\psi_0 e^{-my}}(m\kappa t_1)\mathrm{d}t_1 \\
&\le \left(\int_0^t \left(K^{inv}(t-t_1)K_1(t_1)\langle m\kappa t_1\rangle^{-\sigma}\right)^2\mathrm{d}t_1\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{m\kappa}}\left\|\psi_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R}_+)} \\
&\lesssim k^{\frac{3}{2}-\sigma}\left(\int_0^t \left(\langle t-t_1\rangle^{-\frac{5}{2}-\nu}\langle t_1\rangle^{\frac{3}{2}+\nu}\langle t_1\rangle^{-\sigma}\right)^2\mathrm{d}t_1\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\psi_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})} \\
&\lesssim k^{\frac{3}{2}-\sigma}\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}-\sigma}\left\|\psi_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})}.
\end{aligned} \tag{3-72}$$

对 $\hat{\zeta}_0$ 也进行类似的估计, 我们得到

$$|\xi(t)| \lesssim k^{\frac{3}{2}-\sigma} \langle t\rangle^{-\frac{1}{2}-\sigma} \left\|\psi_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})} + k^{\frac{3}{2}-\sigma} \langle t\rangle^{\frac{1}{2}-\sigma} \left\|\zeta_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})}. \tag{3-73}$$

因为

$$g_{3,4}(s) \lesssim \langle \kappa s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \lesssim \langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu}, \tag{3-74}$$

$$\Delta(s) \sim \langle \kappa s\rangle^{-4} \kappa\left(\beta_1-1\right) \sim \langle s\rangle^{-4}, \tag{3-75}$$

我们有

$$\hat{\chi}_i(t;\eta) \lesssim k^{\frac{3}{2}-\sigma} \langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \times \tag{3-76}$$
$$\int_0^t \langle s_0+t_1\rangle^{\frac{1}{2}+\nu} \left(\langle t_1\rangle^{-\frac{1}{2}-\sigma} \left\|\psi_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})} + \langle t_1\rangle^{\frac{1}{2}-\sigma} \left\|\zeta_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})}\right) \mathrm{d}t_1$$

其中

$$\begin{aligned}
\langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \int_0^t \langle s_0+t_1\rangle^{\frac{1}{2}+\nu} \langle t_1\rangle^{-\frac{1}{2}-\sigma} \mathrm{d}t_1 &\leq \langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \langle s_0+t_1\rangle^{\frac{1}{2}+\nu} \langle t_1\rangle^{-\frac{1}{2}-\sigma} \mathrm{d}t_1 \\
&\leq \langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \langle s_0\rangle^{\nu-\sigma+1} \int_{-\infty}^{\infty} \langle 1+t_1\rangle^{\frac{1}{2}+\nu} \langle t_1\rangle^{-\frac{1}{2}-\sigma} \mathrm{d}t_1 \\
&\leq C_\sigma \langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \langle s_0\rangle^{\nu-\sigma+1}
\end{aligned} \tag{3-77}$$

$$\begin{aligned}
\langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \int_0^t \langle s_0+t_1\rangle^{\frac{1}{2}+\nu} \langle t_1\rangle^{\frac{1}{2}-\sigma} \mathrm{d}t_1 &\leq \langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \langle s_0\rangle^{\nu-\sigma+2} \int_0^{t/s_0} \langle 1+t_1\rangle^{\frac{1}{2}+\nu} \langle t_1\rangle^{-\frac{1}{2}-\sigma} \mathrm{d}t_1 \\
&\leq \langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \langle s_0\rangle^{\nu-\sigma+1} \langle t\rangle
\end{aligned} \tag{3-78}$$

进而得出

$$\hat{\chi}_i(t;\eta) \lesssim k^{\frac{3}{2}-\sigma} \langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \langle s_0\rangle^{\nu-\sigma+1} \left(\left\|\psi_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})} + \langle t\rangle \left\|\zeta_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})}\right). \tag{3-79}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\left\|\chi_i(t;y)\right\|_{H^\alpha(\mathbb{R})}^2 \lesssim \int_{-\infty}^{\infty} \langle \eta\rangle^{2\alpha} |\zeta_i^*(\eta,t)|^2 \mathrm{d}\eta \\
&\lesssim k^{4-2\sigma+2\alpha} \left(\left\|\psi_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})} + \langle t\rangle \left\|\zeta_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \langle s_0\rangle^{2\alpha+2\nu-2\sigma+2} \langle s\rangle^{-3+2\nu} \mathrm{d}s_0 \\
&\lesssim k^{4-2\sigma+2\alpha} \left(\left\|\psi_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})} + \langle t\rangle \left\|\zeta_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})}\right)^2 \langle t\rangle^{2\alpha+4\nu-2\sigma}.
\end{aligned} \tag{3-80}$$

所以

$$\left\|\chi_i\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \lesssim \left(\left\|\psi_0 e^{-my}\right\|_{H^2(\mathbb{R})} + \left\|\zeta_0 e^{-my}\right\|_{H^3(\mathbb{R})}\right) \langle t\rangle^{-2+2\nu}. \tag{3-81}$$

3.2.2 齐次解 χ_h 的大小估计

齐次方程的解

$$\hat{\chi_h}(t;\eta)=\frac{g_3(s)g_4'(s_0)-g_3'(s_0)g_4(s)}{\Delta(s_0)}\hat{\psi}_0(\eta)-\frac{g_3(s)g_4(s_0)-g_3(s_0)g_4(s)}{\Delta(s_0)}\hat{\zeta}_0(\eta) \tag{3-82}$$

中, 因为有估计

$$|g_3(s)|,|g_4(s)|\lesssim\langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu}, \tag{3-83}$$

$$|\Delta(s)|\sim\langle s\rangle^{-4}, \tag{3-84}$$

所以有

$$|\hat{\chi_h}(t;\eta)|\lesssim\langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu}\langle s_0\rangle^{\frac{3}{2}+\nu}\left|\hat{\psi}_0(\eta)\right|+\langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu}\langle s_0\rangle^{\frac{5}{2}+\nu}\left|\hat{\zeta}_0(\eta)\right| \tag{3-85}$$

因此, 当 $\psi_0\in H^2(\mathbb{R}),\zeta_0\in H^3(\mathbb{R})$ 时, 可以利用文献[19] 中的引理 4, 得到 L^2 范数的衰减. 这里引用如下:

引理 3.2.1 *假设存在 $a>0$ 与 $b,c\in\mathbb{R}$ 满足*

$$|\hat{g}(t;k,\eta)|\lesssim\langle s\rangle^{-a}\langle s_0\rangle^{b}|k|^{c}\left|\hat{h}(k,\eta)\right|,\ 0\neq k\in\mathbb{Z},\eta\in\mathbb{R}, \tag{3-86}$$

那么

$$\|P_{\neq 0}g\,(t)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\lesssim\langle t\rangle^{-a}\|h\|_{H_x^cH_y^{b+a}}. \tag{3-87}$$

证明见 Yang 与 Lin[19]. 使用此定理, 就有

$$\|\chi_h\|_{L^2(\mathbb{R})}\lesssim\langle t\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu}\left(\|\psi_0\|_{H^3(\mathbb{R})}+\|\zeta_0\|_{H^4(\mathbb{R})}\right). \tag{3-88}$$

这样, 就可以得到整体的流函数的 L^2 范数衰减, 为

$$\|P_{\neq 0}\chi\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\lesssim\langle t\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu}\left(\|\psi_0\|_{L_x^2H_y^3(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}+\|\zeta_0\|_{L_x^2H_y^4(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\right). \tag{3-89}$$

至于速度场, 因为

$$e^{-\frac{1}{2}\beta y}v^y(t;x,y)=e^{-\frac{1}{2}\beta y}\partial_x\psi(t;x,y)=\partial_x e^{-\frac{1}{2}\beta y}\phi(t;x-ty,y)=\partial_z\chi(t;z,y), \tag{3-90}$$

$$e^{-\frac{1}{2}\beta y}v^x(t;x,y)=e^{-\frac{1}{2}\beta y}\left(-\partial_y\psi(t;x,y)\right)=e^{-\frac{1}{2}\beta y}(-\partial_y+t\partial_z)\phi(t;z,y) \tag{3-91}$$

$$=(-\partial_y+t\partial_z)\left(e^{-\frac{1}{2}\beta y}\phi(t;z,y)\right)-\frac{1}{2}\beta e^{-\frac{1}{2}\beta y}\phi(t;z,y) \tag{3-92}$$

$$=\left(-\partial_y+t\partial_z-\frac{1}{2}\beta\right)\chi(t;x,y), \tag{3-93}$$

所以根据 (3-85), 有

$$\left|\widehat{e^{-\frac{1}{2}\beta y}v^x}(t;k,\eta)\right| = \left|\left(iks-\frac{1}{2}\beta\right)\hat{\chi}(t;k,\eta)\right| \le |k|\langle s\rangle^{-\frac{1}{2}+\nu}\langle s_0\rangle^{\frac{3}{2}+\nu}\left(\left|\hat{\psi}_0(\eta)\right| + \langle s_0\rangle\left|\hat{\zeta}_0(\eta)\right|\right), \tag{3-94}$$

$$\left|\widehat{e^{-\frac{1}{2}\beta y}v^y}(t;k,\eta)\right| = |ik\hat{\chi}(t;k,\eta)| \le |k|\langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu}\langle s_0\rangle^{\frac{3}{2}+\nu}\left(\left|\hat{\psi}_0(\eta)\right| + \langle s_0\rangle\left|\hat{\zeta}_0(\eta)\right|\right) \tag{3-95}$$

利用引理3.2.1即可得到

$$\left\|P_{\neq 0}e^{-\frac{1}{2}\beta y}v^x\right\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y)} \lesssim \langle t\rangle^{-\frac{1}{2}+\nu}\left(\|\psi_0\|_{H^1_xH^2_y(\mathbb{T}\times\mathbb{R})} + \|\zeta_0\|_{H^1_xH^3_y(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\right), \tag{3-96}$$

$$\left\|e^{-\frac{1}{2}\beta y}v^y\right\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y)} \lesssim \langle t\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu}\left(\|\psi_0\|_{H^1_xH^3_y(\mathbb{T}\times\mathbb{R})} + \|\zeta_0\|_{H^1_xH^4_y(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\right). \tag{3-97}$$

这就完成了定理1.0.1的证明.

然而, 这里我们要求初始条件 ψ_0 和 ζ_0 可以零延拓成全空间的 H^3 和 H^4 函数, 而这样的要求往往是很难达到的: 函数在边界 $y=0$ 上没有很好的正则性. 往往它们只是在边界上连续 ($\psi_0(t;0)=\zeta_0(t;0)=0$, 导数却没有连续性, 所以至多具有 H^1 的正则性. 这与我们的要求还有很大的差距. 暂时还没有得到很好的方法来克服这一困难.

它依然在一定程度上给出了结论. 一个更强的条件是, 对于支集真包含于 $y>0$ 的扰动, 显然零延拓是保持正则性的.

另外, 也可以从表达式看出, 当初始条件在频域中是一个紧集时 (Hartman[9] 研究过这一情形), $\langle s\rangle$ 可以简单地用 $\langle t\rangle$ 替换, 而 $\langle s_0\rangle$ 都有界, 所以也可以得到相同的收敛速度.

3.3 $B^2>\frac{1}{4}$ 的情形

当 $B^2>\frac{1}{4}$ 的时候, 由于 Whittaker 函数 $W_{\beta_1,\nu}$ 有无穷个零点, 所以 Laplace 逆变换会有无穷个振荡的解, 这说明是不太可能得到任何衰减的. Dikii[7] 说明了解事实上是 L^∞ 有界的. 这里我们暂时不能给出 L^2 稳定性的结论, 但是笔者认为解很有可能是稳定而不衰减的.

4 管状空间内的情形

这里以原始 Euler 方程 (2-10)-(2-12) 为例, 说明管状空间与半空间的相似处. 使用 Boussinesq 近似得到的结果也是相同的. 之后我们针对 $B^2 > \frac{1}{4}$ 的情形显式地给出特征解.

4.1 与半空间的相似性

和半空间相同, 使用之前定义的 f, ϕ, τ, 管状空间 $(x, y) \in [0, L) \times (0, H)$ 内的方程 (2-10)-(2-12) 变为

$$-\beta\left[R\partial_z - \partial_t\left(\partial_y - Rt\partial_z\right)\right]\phi + \partial_t f = RB^2\partial_z\tau, \tag{4-1}$$

$$\partial_t\tau = R\partial_z\phi, \tag{4-2}$$

$$-\left[\partial_{zz} + \left(\partial_y - Rt\partial_z\right)^2\right]\phi = f. \tag{4-3}$$

经过与之前相同的 Fourier 级数展开与 Laplace 变换 $(z, y) \to (k, \eta)$, 方程 (4-1) 变为

$$-\beta\left[iRk - \partial_t\left(i\eta - iRkt\right)\right]\hat{\phi} + \hat{f}_t = RB^2(ik)\hat{\tau}. \tag{4-4}$$

对 t 求偏导, 可以得到

$$-\beta\left[iRk\partial_t - \partial_{tt}\left(i\eta - iRkt\right)\right]\hat{\phi} + \hat{f}_{tt} = RB^2(ik)\hat{\tau}_t. \tag{4-5}$$

代入由方程 (4-2-4-3) 变换得到的

$$\hat{\tau}_t = iRk\hat{\phi}, \tag{4-6}$$

$$\hat{f} = -\left[(ik)^2 + (i\eta - iRkt)^2\right]\hat{\phi} + \phi_y(t;0) - \phi_y(t;H), \tag{4-7}$$

我们有

$$\partial_{tt}\left[k^2 + (\eta - Rkt)^2 + \beta(i\eta - iRkt)\right]\hat{\phi} - \beta(iRk)\hat{\phi}_t + R^2B^2k^2\hat{\phi} = \xi(t). \tag{4-8}$$

其中

$$\xi(t) = -\phi_{ytt}(t;H) - \phi_{ytt}(t;0). \tag{4-9}$$

和半空间的进行对比, 可以发现除了 ξ 的定义发生了变化以外, 其它部分都完全相同. 然而, 因为 y 的衰减依然快于任何指数函数, 所以仍然有对 η 的解析性要求, 这意味着, ξ 依然满足式 (3-63). 所以最后的结论也是相似的.

4.2 $B^2 > \frac{1}{4}$ 时的特征解

Eliassen[5] 在 Boussinesq 近似的条件下不太严格地证明了管状空间中的稳定性. 这里我们也类似地对没有 Boussinesq 近似的原线性化方程证明在管状空间中的稳定性. 我们显式地给出无穷多个特征值与对应的振荡的解.

从方程 (2-8)-(2-9) 出发, 对 x 方向进行 Fourier 级数展开 $x \to k$, 再对时间做双边 Laplace 变换 $t \to -Rk\sigma$, 即

$$f^*(\sigma; k, y) = \frac{1}{L} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{R}} f(t; x, y) e^{-\frac{2\pi i k x}{L}} e^{\frac{2\pi i R k \sigma t}{L}} \mathrm{d}t\mathrm{d}x \tag{4-10}$$

方便起见, 假定 $L = 2\pi$. 得到

$$\begin{aligned} &\beta \left[iRk - (-iRk\sigma + iRky)\, \partial_y\right] \psi^* \\ &+ (-iRk\sigma + iRky) \left((ik)^2 + \partial_y^2\right) \psi^* = -(ik) \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^* g, \end{aligned} \tag{4-11}$$

$$(-iRk\sigma + iRky) \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^* = \beta (ik) \psi^*. \tag{4-12}$$

化简得到

$$\beta \left[1 - (y - \sigma)\, \partial_y\right] \psi^* + (y - \sigma) \left(-k^2 + \partial_y^2\right) \psi^* = -\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^* \frac{g}{R}, \tag{4-13}$$

$$(y - \sigma) \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^* = \frac{\beta}{R} \psi^*. \tag{4-14}$$

整合得到关于 ψ^* 的方程

$$(y - \sigma)^2 \psi_{yy}^* - \beta (y - \sigma)^2 \psi_y^* + \left[-k^2 (y - \sigma)^2 + \beta (y - \sigma) + B^2\right] \psi^* = 0. \tag{4-15}$$

即

$$\psi_{yy}^* - \beta \psi_y^* + \left[-k^2 + \frac{\beta}{y - \sigma} + \frac{B^2}{(y - \sigma)^2}\right] \psi^* = 0. \tag{4-16}$$

其中 B^2 是 Richardson 常数. 令 $Y(y) = e^{-\frac{\beta y}{2}} \psi^*(y + \sigma)$, 即可消去一次项, 得到

$$Y''(y) + \left(-k^2 - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta}{y} + \frac{B^2}{y^2}\right) Y(y) = 0. \tag{4-17}$$

为了变为 Whittaker 方程, 令 $m = \sqrt{k^2 + \frac{\beta^2}{4}}, \nu^2 = \frac{1}{4} - B^2, \kappa = \frac{k}{m}, \beta_1 = \frac{\beta}{2m}$, 则有

$$\frac{1}{4m^2} Y''(y) + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\beta_1}{2my} + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{(2my)^2}\right] Y(y) = 0. \tag{4-18}$$

它的两个解为

$$Y_1(y) = M_{\beta_1,-\nu}(2my) = e^{-my}\,(2my)^{\frac{1}{2}+\nu}\,M\left(\nu-\beta_1+\frac{1}{2},1+2\nu;2my\right), \tag{4-19}$$

$$Y_2(y) = W_{\beta_1,-\nu}(2my) = e^{-my}\,(2my)^{\frac{1}{2}+\nu}\,U\left(\nu-\beta_1+\frac{1}{2},1+2\nu;2my\right). \tag{4-20}$$

因此, 我们得到方程 (4-15) 的两个线性无关的解,

$$g_5(y+\sigma) = e^{-my(1-\beta_1)}\,(2my)^{\frac{1}{2}-\nu}\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu;1-2\nu;2my\right), \tag{4-21}$$

$$g_6(y+\sigma) = e^{-my(1-\beta_1)}\,(2my)^{\frac{1}{2}+\nu}\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1+\nu;1+2\nu;2my\right). \tag{4-22}$$

如要满足 $y=0$ 与 $y=H$ 处同时为 0 的边界条件, 则必有

$$g_5(0)g_6(L)-g_5(L)g_6(0)=0. \tag{4-23}$$

将 g_5 与 g_6 的定义代入, 得到

$$\begin{aligned}
&e^{-m(-\sigma)(1-\beta_1)}\,(2m(-\sigma))^{\frac{1}{2}-\nu}\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu;1-2\nu;2m(-\sigma)\right)\\
&\quad\times e^{-m(L-\sigma)(1-\beta_1)}\,(2m(L-\sigma))^{\frac{1}{2}+\nu}\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1+\nu;1+2\nu;2m(L-\sigma)\right)\\
&=e^{-m(-\sigma)(1-\beta_1)}\,(2m(-\sigma))^{\frac{1}{2}+\nu}\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1+\nu;1+2\nu;2m(-\sigma)\right)\\
&\quad\times e^{-m(L-\sigma)(1-\beta_1)}\,(2m(L-\sigma))^{\frac{1}{2}-\nu}\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu;1-2\nu;2m(L-\sigma)\right).
\end{aligned} \tag{4-24}$$

即

$$\begin{aligned}
&\frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu;1-2\nu;2m(-\sigma)\right)\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1+\nu;1+2\nu;2m(L-\sigma)\right)}{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1+\nu;1+2\nu;2m(-\sigma)\right)\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu;1-2\nu;2m(L-\sigma)\right)}\\
&=\left(\frac{L-\sigma}{-\sigma}\right)^{2\nu}.
\end{aligned} \tag{4-25}$$

下面证明可以找到可数个离散的实的 σ_n 可以满足上式, 进而得到可数个振荡的解. 注意到当 $B^2>\frac{1}{4}$ 的时候, ν 取纯虚数, 故当自变量 z 为实数的时候, $g_5(z)$ 与 $g_6(z)$ 是共轭的. 所以有

$$\frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu;1-2\nu;2m(-\sigma)\right)}{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1+\nu;1+2\nu;2m(-\sigma)\right)} = e^{2i\arg\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu;1-2\nu;2m(-\sigma)\right)}, \tag{4-26}$$

$$\frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1+\nu;1+2\nu;2m(L-\sigma)\right)}{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu;1-2\nu;2m(L-\sigma)\right)} = e^{-2i\arg\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1-\nu;1-2\nu;2m(L-\sigma)\right)}, \tag{4-27}$$

对式子 (4-25) 两边取对数, 即得

$$
\begin{aligned}
&2i\arg {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1+\nu; 1+2\nu; 2m(L-\sigma)\right) \\
&-2i\arg {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1+\nu; 1+2\nu; 2m(-\sigma)\right) = 2\nu\log\left(\frac{L-\sigma}{-\sigma}\right) + 2in\pi,
\end{aligned} \tag{4-28}
$$

对某个 n 成立, 即

$$
\begin{aligned}
&\arg {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1+\nu; 1+2\nu; 2m(L-\sigma)\right) \\
&-\arg {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\beta_1+\nu; 1+2\nu; 2m(-\sigma)\right) = \frac{\nu}{i}\log\left(\frac{L-\sigma}{-\sigma}\right) + n\pi,
\end{aligned} \tag{4-29}
$$

令 $\sigma \to L^+$, 则等号左边是有界且连续变化的, 但是等号右边的对数项却减小至负无穷, 因此一定会经过无穷个 σ_n 满足上述方程, 并且 $\sigma_n \to L^+$. 同理, 有另外无穷个 $\sigma_{-n} = L - \sigma_n \to 0^-$. 因此可以断言, 存在某个 $N > 0$ 使得对一切 $n > N$ 都存在 σ_n, 并且有 $\sigma_N > \sigma_{N+1} > \sigma_{N+2} > \cdots > L$, 伴随着 $\sigma_{-N} < \sigma_{-N-1} < \sigma_{-N-2} < \cdots < 0$.

每一个 σ_n 都对应于一个特征函数

$$
\psi_n^* = g_5(L-\sigma_n)g_6(y-\sigma_n) - g_6(L-\sigma_n)g_5(y-\sigma_n). \tag{4-30}
$$

对应于该特征函数的初值就是振荡不衰减的. 因此, 由所有的 ψ_n^* 张成的函数

$$
\psi(t;x,y) = \sum_{k\neq 0}\sum_{|n|>N} a_{n,k}\psi_n^*(y)e^{\frac{2\pi ikx}{L}}e^{-\frac{2\pi iRk\sigma t}{L}} \tag{4-31}
$$

对应的初始条件给出的解都是振荡而不收敛的. 然而, 我们并不清楚这些特征函数是否完备, 即它们能否张成 L^2 的稠子集. 类似的问题也出现在了 Eliassen[5] 的论文中, 他猜想这些特征函数是完备基, 但是也没有能够给出证明. 但是至少我们可以看出, 在 $B^2 > \frac{1}{4}$ 的情形下相当多的初始条件是得不到衰减的.

5 Hamilton 系统与不变量

这一节我们把线性化方程组 (2-10)-(2-12) 与带有 Boussinesq 近似的方程组 (2-18)-(2-20) 在 Hamilton 系统的角度下研究, 并说明为什么非线性稳定性是不容易研究的. 首先我们来看带有 Boussinesq 近似的方程组. 为方便起见, 假定剪切常数 $R = 1$.

5.1 带有 Boussinesq 近似的 Euler 方程组的守恒量

这时方程为

$$(\partial_t + y\partial_x)\omega = B^2 T_x, \tag{5-1}$$

$$(\partial_t + y\partial_x)T = \psi_x. \tag{5-2}$$

也可以写成

$$\begin{aligned}
\partial_t \begin{pmatrix} \omega \\ T \end{pmatrix} &= \partial_x \begin{pmatrix} -y\omega + B^2 T \\ -yT + \psi \end{pmatrix} \\
&= \partial_x \begin{pmatrix} -y & B^2 \\ (-\Delta)^{-1} & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ T \end{pmatrix} \\
&= \partial_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & -y \\ -y & B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ T \end{pmatrix} \\
&= JL \begin{pmatrix} \omega \\ T \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5-3}$$

其中

$$L = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{-1} & -y \\ -y & B^2 \end{pmatrix} \tag{5-4}$$

是自伴的 (即 $L^* = L$),

$$J = \partial_x \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5-5}$$

是反自伴的 (即 $J^* = -J$).

这样的系统会有两个不变量 (见 Lin 和 Zeng[21])

定理 5.1.1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2+\frac{1}{2}B^2T^2-y\omega T\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0, \tag{5-6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\omega T\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \tag{5-7}$$

证明. 逐项计算即可.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\psi\omega_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\psi\left(-y\omega_x+B^2T_x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\omega\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-B^2\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}T\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{5-8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\frac{1}{2}B^2T^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}B^2TT_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}B^2T\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}B^2yTT_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&B^2\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}T\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{5-9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\omega T\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\omega_tT\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\omega T_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\left(-y\omega_x+B^2T_x\right)T\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\omega\left(\psi_x-yT_x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\omega\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{5-10}$$

这证明了 (5-6). 下面计算 (5-7).

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\omega T\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\omega_tT\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\omega T_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(-y\omega_x+B^2T_x\right)T\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\omega\left(\psi_x-yT_x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\omega\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}(\psi_{xx}+\psi_{yy})\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\end{aligned} \tag{5-11}$$

这样就完成了该定理的证明. ■

我们将这两个不变量记为

$$H(\omega,T)=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla\psi\right|^2+\frac{1}{2}B^2T^2-y\omega T\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5-12}$$

$$P(\omega,T)=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\omega T\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5-13}$$

那么就有

$$H\left(\omega,T\right)=\frac{1}{2}\left\langle L\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix}\right\rangle, \tag{5-14}$$

$$P(\omega,T)=\frac{1}{2}\left\langle \tilde{J}\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix}\right\rangle \tag{5-15}$$

其中

$$\tilde{J}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}. \tag{5-16}$$

容易看出实际上

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(\omega,T)&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle L\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix}\right\rangle\\&=\left\langle L\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix},\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix}\right\rangle\\&=\left\langle L\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix},JL\begin{pmatrix}\Omega\\\Upsilon\end{pmatrix}\right\rangle\\&=0.\end{aligned} \tag{5-17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(\omega,T)&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle \tilde{J}\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix}\right\rangle\\&=\left\langle \tilde{J}\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix},\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix}\right\rangle\\&=\left\langle \begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix},\tilde{J}JL\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix}\right\rangle\\&=\left\langle \begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix},\frac{\partial}{\partial x}L\begin{pmatrix}\omega\\T\end{pmatrix}\right\rangle\\&=0.\end{aligned} \tag{5-18}$$

可是, 这两个不变量都有无限多个负方向, 即让二次型为负的子空间是无穷维的, 所以不能用于判定非线性稳定性.

5.2 原 Euler 方程组的守恒量

原始 Euler 方程的线性化方程为

$$
\begin{aligned}
-\beta\left[\partial_x-(\partial_t+y\partial_x)\partial_y\right]\psi+(\partial_t+y\partial_x)\omega=B^2T_x, \qquad (5\text{-}19)\\
(\partial_t+y\partial_x)T=\psi_x. \qquad (5\text{-}20)
\end{aligned}
$$

也可以写成

$$
\begin{aligned}
(\partial_t+y\partial_x)\left(\omega+\beta\psi_y\right)=B^2T_x+\beta\psi_x, \qquad (5\text{-}21)\\
(\partial_t+y\partial_x)T=\psi_x. \qquad (5\text{-}22)
\end{aligned}
$$

或者, 等价地有

$$
\begin{aligned}
\partial_t\left(\omega+\beta\psi_y\right)=\partial_x\left(-y\left(\omega+\beta\psi_y\right)+\beta\psi+B^2T\right), \qquad (5\text{-}23)\\
\partial_tT=\partial_x\left(-yT+\psi\right). \qquad (5\text{-}24)
\end{aligned}
$$

下面我们得到它的一个不变量.

定理 5.2.1

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla\psi\right|^2+\frac{1}{2}\left(B^2+\beta y\right)T^2-y\left(\omega+\beta\psi_y\right)T\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad (5\text{-}25)
$$

证明. 同样, 只需要逐项验证即可.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\frac{1}{2}\left|\nabla\psi\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\psi\omega_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\psi\left[-\beta\psi_{yt}-y\left(\omega+\beta\psi_y\right)_x+\beta\psi_x+B^2T_x\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\left(\omega+\beta\psi_y\right)\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-B^2\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}T\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned} \qquad (5\text{-}26)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\frac{1}{2}\left(B^2+\beta y\right)T^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(B^2+\beta y\right)TT_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(B^2+\beta y\right)T\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\quad-\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(B^2+\beta y\right)yTT_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=B^2\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}T\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\beta\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}yT\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned} \qquad (5\text{-}27)
$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y} y\left(\omega+\beta\psi_y\right)T\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y} y\left(\omega+\beta\psi_y\right)_t T\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y} y\left(\omega+\beta\psi_y\right)T_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y} y\left[-y\left(\omega+\beta\psi_y\right)_x+\beta\psi_x+B^2T_x\right]T\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y} y\left(\omega+\beta\psi_y\right)\left(\psi_x-yT_x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\beta\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y} yT\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y} y\left(\omega+\beta\psi_y\right)\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{5-28}$$

■

将这个不变量记为

$$H\left(\omega+\beta\psi_y,T\right)=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla\psi\right|^2+\frac{1}{2}\left(B^2+\beta y\right)T^2-y\left(\omega+\beta\psi_y\right)T\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5-29}$$

那么

$$H\left(\omega+\beta\psi_y,T\right)=\frac{1}{2}\left\langle L\begin{pmatrix}\omega+\beta\psi_y\\T\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\omega+\beta\psi_y\\T\end{pmatrix}\right\rangle \tag{5-30}$$

其中

$$L\begin{pmatrix}\omega+\beta\psi_y\\T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-\Delta+\beta\partial_y)^{-1} & -y\\-y & B^2+\beta y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega+\beta\psi_y\\T\end{pmatrix} \tag{5-31}$$

所以有

$$\begin{aligned}\partial_t\begin{pmatrix}\omega+\beta\psi_y\\T\end{pmatrix}&=\partial_x\begin{pmatrix}-y\left(\omega+\beta\psi_y\right)+\beta\psi+B^2T\\-yT+\psi\end{pmatrix}\\&=\partial_x\begin{pmatrix}-y+\beta(-\Delta+\beta\partial_y)^{-1} & B^2\\(-\Delta+\beta\partial_y)^{-1} & -y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega+\beta\psi_y\\T\end{pmatrix}\\&=\partial_x\begin{pmatrix}\beta & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-\Delta+\beta\partial_y)^{-1} & -y\\-y & B^2+\beta y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega+\beta\psi_y\\T\end{pmatrix}\\&=JL\begin{pmatrix}\omega+\beta\psi_y\\T\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5-32}$$

其中

$$J=\partial_x\begin{pmatrix}\beta & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \tag{5-33}$$

是反对称算子. 然而 L 并不是一个自伴算子, 因为对于在 $\partial\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y$ 上满足边界条件

$\psi_1=\psi_2=0$ 的 ψ_1,ψ_2 我们有

$$\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left[(-\Delta+\beta\partial_y)\psi_1\right]\psi_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\psi_1\left[(-\Delta-\beta\partial_y)\psi_2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5-34}$$

但是, 我们可以给它们加上一个指数权重, 就能得到一个这样的系统.

定理 5.2.2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla\psi\right|^2+\frac{1}{2}\left(B^2+\beta y\right)T^2-y\left(\omega+\beta\psi_y\right)T\right)e^{-\beta y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0, \tag{5-35}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(\omega+\beta\psi_y-\frac{\beta}{2}T\right)Te^{-\beta y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \tag{5-36}$$

证明. 定义

$$\Psi=e^{-\frac{1}{2}\beta y}\psi,\qquad\qquad \Upsilon=e^{-\frac{1}{2}\beta y}T, \tag{5-37}$$

那么有

$$\begin{aligned}-\Delta\Psi&=-e^{-\frac{1}{2}\beta y}\Delta\psi-2\left(-\frac{1}{2}\beta\right)e^{-\frac{1}{2}\beta y}\psi_y-\left(\frac{1}{4}\beta^2\right)e^{-\frac{1}{2}\beta y}\psi\\&=e^{-\frac{1}{2}\beta y}\left(\omega+\beta\psi_y\right)-\frac{1}{4}\beta^2\Psi.\end{aligned} \tag{5-38}$$

所以可以定义

$$\Omega=\left(-\Delta+\frac{1}{4}\beta^2\right)\Psi=e^{-\frac{1}{2}\beta y}\left(\omega+\beta\psi_y\right). \tag{5-39}$$

因此, 将方程 (5-19-5-22) 乘上 $e^{-\frac{1}{2}\beta y}$ 我们得到

$$(\partial_t+y\partial_x)\Omega=B^2\Upsilon_x+\beta\Psi_x, \tag{5-40}$$

$$(\partial_t+y\partial_x)\Upsilon=\Psi_x. \tag{5-41}$$

它等价于

$$\Omega_t=\partial_x\left(-y\Omega+\beta\Psi+B^2\Upsilon\right), \tag{5-42}$$

$$\Upsilon_t=\partial_x\left(-y\Upsilon+\Psi\right). \tag{5-43}$$

要证明第一个等式, 逐项计算

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\frac{1}{2}\left|\nabla\Psi\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\Psi\left(-\Delta\Psi_t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\Psi\left(\Omega_t-\frac{1}{4}\beta^2\Psi_t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{5-44}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2}{4}\Psi^2+\left|\nabla\Psi\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\Psi\Omega_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\Psi\left(-y\Omega_x+\beta\Psi_x+B^2\Upsilon_x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\Omega\Psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-B^2\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\Upsilon\Psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}\tag{5-45}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\frac{1}{2}\left(B^2+\beta y\right)\Upsilon^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(B^2+\beta y\right)\Upsilon\Upsilon_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(B^2+\beta y\right)\Upsilon\Psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad-\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(B^2+\beta y\right)y\Upsilon\Upsilon_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=B^2\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\Upsilon\Psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\beta\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\Upsilon\Psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}\tag{5-46}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\Omega\Upsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\Omega_t\Upsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\Omega\Upsilon_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\left(-y\Omega_x+\beta\Psi_x+B^2\Upsilon_x\right)\Upsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\Omega\left(\Psi_x-y\Upsilon_x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\beta\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\Upsilon\Psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}y\Omega\Psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{5-47}$$

所以 (5-35) 成立. 将这个不变量记为 (请原谅少许对记号的滥用)

$$H\left(\Omega,\Upsilon\right)=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2}{4}\Psi^2+\left|\nabla\Psi\right|^2\right)+\frac{1}{2}\left(B^2+\beta y\right)\Upsilon^2-y\Omega\Upsilon\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{5-48}$$

那么

$$H\left(\Omega,\Upsilon\right)=\frac{1}{2}\left\langle L\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\right\rangle \tag{5-49}$$

其中

$$L=\begin{pmatrix}\left(-\Delta+\frac{1}{4}\beta^2\right)^{-1} & -y\\ -y & B^2+\beta y\end{pmatrix} \tag{5-50}$$

是一个对称算子. 所以

$$\begin{aligned}\partial_t\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}&=\partial_x\begin{pmatrix}-y\Omega+\beta\Psi+B^2\Upsilon\\ -y\Upsilon+\Psi\end{pmatrix}\\ &=\partial_x\begin{pmatrix}-y+\beta(-\Delta+\frac{1}{4}\beta^2)^{-1} & B^2\\ (-\Delta+\frac{1}{4}\beta^2)^{-1} & -y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\\ &=\partial_x\begin{pmatrix}\beta & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(-\Delta+\frac{1}{4}\beta^2\right)^{-1} & -y\\ -y & B^2+\beta y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\\ &=JL\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5-51}$$

其中

$$J=\partial_x\begin{pmatrix}\beta & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{5-52}$$

是反自伴的.

要证明第二个不变量 (5-36), 只需要计算

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\Omega\Upsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\Omega_t\Upsilon+\Omega\Upsilon_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(-y\Omega_x+\beta\Psi_x+B^2\Upsilon_x\right)\Upsilon+\Omega\left(-y\Upsilon_x+\Psi_x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\beta\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\Psi_x\Upsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\Omega\Psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\beta\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\left(\Upsilon_t+y\Upsilon_x\right)\Upsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\Psi_x\left[\left(-\Delta+\frac{1}{4}\beta^2\right)\Psi\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\frac{1}{2}\beta\Upsilon^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{5-53}$$

■

我们将这个不变量记为

$$P(\Omega,\Upsilon)=\iint_{\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y}\Omega\Upsilon-\frac{1}{2}\beta\Upsilon^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left\langle\tilde{J}\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\right\rangle \tag{5-54}$$

其中

$$\tilde{J}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}. \tag{5-55}$$

是对称矩阵.

容易看出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(\Omega,\Upsilon)&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle L\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\right\rangle\\ &=\left\langle L\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix},\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\right\rangle\\ &=\left\langle L\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix},JL\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\right\rangle\\ &=0.\end{aligned} \tag{5-56}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(\Omega,\Upsilon)&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\tilde{J}\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\right\rangle\\ &=\left\langle\tilde{J}\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix},\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\right\rangle\\ &=\left\langle\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix},\tilde{J}JL\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\right\rangle\\ &=\left\langle\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix},\frac{\partial}{\partial x}L\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\right\rangle\\ &=0.\end{aligned} \tag{5-57}$$

可是, 这三个不变量都有无限多个负方向, 即让二次型为负的子空间是无穷维的, 所以不能用于判定非线性稳定性.

6 结论与展望

总结起来, 本文的主要结论如下.

1) 当 Richardson 数小于 $\frac{1}{4}$ 时, 如果密度衰减常数 β 足够地小, 那么速度场有 L^2 代数衰减. 如果 β 不足够小, 则解可以写成有限个周期解加上一个代数衰减的余项. 代数衰减的速度只取决于 Richardson 数.

2) 当 Richardson 数大于 $\frac{1}{4}$ 时, 解是稳定的, 有可数个周期的解.

3) 半空间和管状空间有相同的结论.

4) H 与 P 是原系统两个非正定的不变量.

当然, 本文还有一些不足. 最大的问题在于对于初始条件的正则性过于严格, 并不自然. 另外对于特征函数是否构成完备基也没有办法说明. 之后的研究方向其一就是克服上述困难, 将对初始条件的限制放宽, 其二是原方程的非线性无粘衰减是否存在. 这些都有待进一步的探究.

参考文献

[1] Taylor G I. Effect of Variation in Density on the Stability of Superposed Streams of Fluid[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1931, 132(820) : 499 – 523.

[2] Dyson F J. Stability of an Idealized Atmosphere. II. Zeros of the Confluent Hypergeometric Function[J]. Physics of Fluids A Fluid Dynamics, 1960, 3(2) : 155 – 157.

[3] Dikiĭ L A. On zeros of Whittaker and MacDonald functions with complex index[J]. Izv.akad.nauk Sssr Ser.mat, 1960 : 943 – 954.

[4] Høiland E. On the dynamic effect of variation in density on two-dimensional perturbations of flow with constant shear.[J]. Geofys. Publ. Norske Vid.-Akad. Oslo, 1953(10).

[5] Eliassen A, Høiland E, Riis E. Two-Dimensional Perturbation of a Flow with Constant Shear of a Stratified Fluid[J]. Institute for Weather and Climate Research, 1953(1) : 1 – 30.

[6] Case K M. Stability of inviscid plane Couette flow[J]. Physics of Fluids A Fluid Dynamics, 1960, 3(1) : 143 – 148.

[7] Dikiĭ L A. On the stability of plane parallel flows of an inhomogeneous fluid[J]. Journal of Applied Mathematics & Mechanics, 1960, 24(2) : 357 – 369.

[8] Kuo H L. Perturbations of Plane Couette Flow in Stratified Fluid and Origin of Cloud Streets[J]. Physics of Fluids, 1963, 6(2) : 195 – 211.

[9] Hartman R J. Wave propagation in a stratified shear flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1975, 71(01) : 89.

[10] Chimonas G. Algebraic disturbances in stratified shear flows[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1979, 90(1) : 1 – 19.

[11] Brown S N, Stewartson K. On the algebraic decay of disturbances in a stratified linear shear flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1980, 100(4) : 811 – 816.

[12] Farrell B F, Ioannou P J. Transient Development of Perturbations in Stratified Shear Flow[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1993, 50(14) : 2201 – 2214.

[13] Yaglom A M. Hydrodynamic Instability and Transition to Turbulence[M]. Nice : Springer Netherlands, 2012.

[14] Orr W M. The Stability or Instability of the Steady Motions of a Perfect Liquid and of a Viscous Liquid. Part II: A Viscous Liquid[J]. Proceedings of the Royal Irish Academy, 1907, 27 : 69 – 138.

[15] Lin Z, Zeng C. Inviscid Dynamical Structures Near Couette Flow[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2010, 200(3) : 1075 – 1097.

[16] Bedrossian J, Masmoudi N. Asymptotic Stability for the Couette Flow in the 2D Euler Equations[J]. Applied Mathematics Research Express, 2013, 2014(1) : 157 – 175.

[17] Zillinger C. Linear Inviscid Damping for Monotone Shear Flows in a Finite Periodic Channel, Boundary Effects, Blow-up and Critical Sobolev Regularity[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2016, 221(3) : 1449 – 1509.

[18] Wei D, Zhang Z, Zhao W. Linear Inviscid Damping for a Class of Monotone Shear Flow in Sobolev Spaces[J]. Communications on Pure & Applied Mathematics, 2015.

[19] Yang J, Lin Z. Linear Inviscid Damping for Couette Flow in Stratified Fluid[J/OL]. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2017 : 1 – 28[2017-05-29].
http://dx.doi.org/10.1007/s00021-017-0328-3.

[20] Bateman H. Higher Transcendental Functions [Volumes I-III][M]. California : McGraw-Hill Book Company, 1953.

[21] Lin Z, Zeng C. Instability, index theorem, and exponential trichotomy for Linear Hamiltonian PDEs[J]. arXiv:1703.04016, 2017.

致　　谢

本文是在西安交通大学的李东升老师与佐治亚理工学院的林治武老师的共同指导下完成的, 受到美国国家科学基金会 NSF (grantDMS-1411803) 项目的资助. 林治武老师为论文的选题, 文献资料的选择提供了十分有益的指导, 并十分关照本人的工作进展, 使得论文得以顺利完成. 在佐治亚理工学院实习期间, 林治武老师组织的丰富的讨论班与讲座也给予了我很多启发. 同时也需要在此感谢学校拔尖办给予我此次出访机会, 感谢佐治亚理工学院的同僚们的帮助, 让我能够进行这样一项很有意义的科研. 另外, 本毕业设计虽然是在外校完成的, 李东升老师仍然给予了相当细致的关照与充分的支持, 本文的完成离不开他的帮助. 谨向林治武老师与李东升老师致以衷心的感谢!