半空间与管状空间中 剪切流的无粘衰减

杨金成
指导老师：李东升老师 & 林治武老师

西安交通大学数学试验班31
佐治亚理工学院访问学生

June 14, 2017

目录

背景阐述

- Euler 方程
- 稳态解与线性化
- 研究目标
- 主要结论

背景阐述

无粘性，不可压缩流体遵守的 Euler 方程

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}+\nabla p=\rho\boldsymbol{g}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\rho=0$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

其中密度 ρ, 压强 p, 流速 $\boldsymbol{v}$ 是函数, 重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 是沿 y 轴负方向的常量, 自变量 $(t;x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}^+$(或者$\mathbb{I}$).

背景阐述

无粘性，不可压缩流体遵守的 Euler 方程

时间上，由于 Euler 方程是可逆系统，所以实际上只需要研究 $t > 0$ 就足够了. 空间上研究在水平方向上呈周期 $x \in \mathbb{T}$, 竖直方向上为半空间 $y \in \mathbb{R}^+$ 或者有界 $y \in \mathbb{I}$ 的情形.

如果把空间记为 Ω, 则在边界 $\partial\Omega$ 上流速满足边界条件

$$\boldsymbol{v} \cdot \nu = 0$$

其中ν是边界上的外法向量.

背景阐述

Euler 方程的稳态解

$$\boldsymbol{v} = (U(y), 0)$$
$$\rho = \rho_0(y)$$

是原方程一个与时间无关的解，它代表的是一般的密度分层的剪切流.

本课题研究了带有指数衰减密度的 Couette 流，即

$$\boldsymbol{v} = (U(y), 0) = (Ry, 0)$$
$$\rho = \rho_0(y) = Ae^{-\beta y}$$

其中 $A > 0, \beta > 0, R \in \mathbb{R}$ 均为常数. 这是在大气学、海洋学中使用到的常用模型.

背景阐述

稳态解附近的线性化

对于上述方程附近做一个扰动，则扰动所满足的线性化方程为

$$
\begin{aligned}
\rho_0\left[\left(\partial_t+Ry\partial_x\right)v^x+Rv^y\right]&=-\partial_x p\\
\rho_0\left[\left(\partial_t+Ry\partial_x\right)v^y\right]&=-\partial_y p-\rho g\\
\partial_x v^x+\partial_y v^y&=0\\
\left(\partial_t+Ry\partial_x\right)\rho+v^y\partial_y\rho_0&=0
\end{aligned}
$$

其中 ρ 是密度的扰动，p 是压强的扰动，(v^x,v^y) 是速度的扰动．g 是重力加速度的大小，是一个常数．

背景阐述

研究目标

之前的文献 (Dikki 1960) 中得到了流函数扰动的逐点有界性; 得到 $B^2 > \frac{1}{4}$ 时解的线性稳定性; 在全空间 $y \in \mathbb{R}$ 中 (Yang & Lin 2017) 得到了流函数, 速度场与密度场的 L^2 衰减.

这次研究的目标是得到半空间和管状空间及边界条件下, 速度场的 L^2 有界性, 或者衰减.

主要结论：定理 1

令 $(\psi(t;x,y),\rho(t;x,y))$ 是上述线性化方程在初始条件

$$\psi(0;x,y)=e^{\frac{1}{2}\beta y}\psi_0(x,y),\quad \psi_t(0;x,y)=e^{\frac{1}{2}\beta y}\zeta_0(x,y),$$

下的解，其中速度场 $\boldsymbol{v}=\nabla^\perp\psi=(v^x,v^y)$, $y\in\mathcal{U}_y=\mathbb{R}^+$ 或者 $\mathbb{I}=(0,H)$, $x\in\mathbb{T}=[0,L)$ 是 L 周期的. 下面的记号中, $f\lesssim g$ 表示 $f\le Cg$, 其中常数 C 只取决于 R,β,g. 我们记 $\langle f\rangle:=\sqrt{1+f^2}$ 并用 $P_{\neq 0}$ 表示往水平方向(x 方向)为常数的 Fourier 项的正交补做投影，即

$$P_{\neq 0}f(t;x,y)=f(t;x,y)-\frac{1}{L}\int_0^L f(t;x,y)\,dx.$$

那么

背景阐述

主要结论: 定理 1

- 当 $0 < B^2 < \frac{1}{4}$ 时, 令 $\nu = \sqrt{\frac{1}{4} - B^2}$, $\beta^* = \frac{\beta}{\sqrt{4+\beta^2}}$, 则 $\frac{1}{2} + \nu - \beta^* > 0$ 时, 有

$$\left\| P_{\neq 0} e^{-\frac{1}{2}\beta y} v^x \right\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y)} \lesssim \langle t\rangle^{-\frac{1}{2}+\nu} \left(\|\psi_0\|_{H^1_x H^2_y(\mathbb{T}\times\mathbb{R})} + \|\zeta_0\|_{H^1_x H^3_y(\mathbb{T}\times\mathbb{R})} \right),$$

$$\left\| e^{-\frac{1}{2}\beta y} v^y \right\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathcal{U}_y)} \lesssim \langle t\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \left(\|\psi_0\|_{H^1_x H^3_y(\mathbb{T}\times\mathbb{R})} + \|\zeta_0\|_{H^1_x H^4_y(\mathbb{T}\times\mathbb{R})} \right),$$

如果初始条件 ψ_0 和 ζ_0 可以零延拓成全空间中满足上述正则性的函数.

背景阐述

主要结论: 定理 1

- 当 $0 < B^2 < \frac{1}{4}$ 且 $\frac{1}{2} + \nu - \beta^* \leq 0$ 时, 存在有限个振荡的解, 这些振荡的解在 x 方向上有一个最小的共同波长. 而方程的解在这些振荡解张成的补空间上的投影, 有与前文中相同的收敛速度.
- 当 $B^2 > \frac{1}{4}$ 时, 有可数个振荡的解, 因此方程的解中流函数没有衰减, 但是有 L^2 稳定性.

Laplace 变换与解

- Fourier 变换与 Laplace 变换
- 方程的解的形式
- 方程的解的控制

Laplace 变换与解

Fourier 变换与 Laplace 变换

由于 x 方向是周期的, 所以在 x 方向上使用 Fourier 级数分解. 其 Fourier 系数为

$$f_k(y) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x,y)e^{-\frac{2\pi ikx}{L}}\,\mathrm{d}x$$

对于半空间的情形, 在 y 方向上可以使用 Laplace 变换, 其变换为

$$\hat{f}_k(\eta) = \int_0^\infty f_k(y)e^{-i\eta y}\mathrm{d}y,$$

Fourier 变换与 Laplace 变换

整合线性化方程组, 设 $\omega = (\partial_y, -\partial_x) \cdot \boldsymbol{v}$ 是速度场扰动的涡度场, $\psi = (-\Delta)^{-1} \omega$ 为扰动的流函数. $\chi = e^{-\frac{1}{2}\beta y}\psi$ 给流函数加上了一个指数权重. 加上一个随背景剪切流运动的坐标 $z = x - Ryt$, 并对 z 方向做 Fourier 级数展开, 则 χ 的 e^{ikz} 项所对应的 Fourier 系数 $\chi_k(t; y)$ 满足的方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{4}\beta^2 + k^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y} - iRkt\right)^2\right]\chi_k = i\beta Rk\frac{\partial \chi_k}{\partial t} - g\beta k^2\chi_k$$

Laplace 变换与解

Fourier 变换与 Laplace 变换

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{4}\beta^2+k^2-\left(\frac{\partial}{\partial y}-iRkt\right)^2\right]\chi_k=i\beta Rk\frac{\partial\chi_k}{\partial t}-g\beta k^2\chi_k$$

由于 $k=0$ 的 Fourier 项恰好对应于分层剪切流, 所以是稳态解, 因此只考虑 $k\neq 0$ 的部分. 这些部分的 $\chi_k(t;y)$ 满足边界条件

$$\chi_k(t;0)=0.$$

设它在 $t=0$ 的时刻满足初始条件

$$\chi_k(0;y)=\psi(y),\partial_t\chi_k(0;y)=\zeta(y).$$

Fourier 变换与 Laplace 变换

将方程对 y 方向进行 Laplace 变换, 得到(省略下标 k)

$$\partial_{tt}\left[\frac{1}{4}\beta^2+k^2+(\eta-Rkt)^2\right]\hat{\chi}-i\beta Rk\hat{\chi}_t+R^2B^2k^2\hat{\chi}=\xi(t).$$

其中

$$\xi(t)=-\frac{\partial^3\chi(t;0)}{\partial y\partial t^2}$$

是边界项, 初始条件变为

$$\hat{\chi}(0;\eta)=\hat{\psi}_0(\eta),\hat{\chi}_t(0;\eta)=\hat{\zeta}_0(\eta).$$

Laplace 变换与解

半空间与管状空间中
剪切流的无粘衰减

杨金成
指导老师：李东升老师 & 林治武老师

方程的解的形式

上述方程是一个线性常微分方程, 它的解可以写成满足初始条件的对应的齐次方程的解 $\hat{\chi}_h$, 加上零初始条件的非齐次方程的解 $\hat{\chi}_i$. 可以显式地解得

$$\hat{\chi}_h(t;\eta) = \frac{g_3(s)g_4'(s_0) - g_3'(s_0)g_4(s)}{\Delta(s_0)}\hat{\psi}_0(\eta) - \frac{g_3(s)g_4(s_0) - g_3(s_0)g_4(s)}{\Delta(s_0)}\hat{\zeta}_0(\eta)$$

其中 $s_0 = -\dfrac{\eta}{Rk}$ 是 Laplace 频率与 Fourier 频率的比的常数倍, $s = t + s_0$ 是时间的一个平移.

Laplace 变换与解

方程的解的形式

其中

$$g_3(s) = F\left(\frac{3}{2}-\nu, \frac{3}{2}+\nu; 2-\beta_1; \frac{1+i\kappa s}{2}\right),$$

$$g_4(s) = \left(\frac{1+i\kappa s}{2}\right)^{-1+\beta_1}$$

$$F\left(\frac{1}{2}+\beta_1-\nu, \frac{1}{2}+\beta_1+\nu; \beta_1; \frac{1+i\kappa s}{2}\right)$$

是 ODE 的两个线性无关的解, $F(a, b; c; z)$ 是 Gauss 超几何函数, Δ 是这两个解的 Wroński 行列式.

Laplace 变换与解

方程的解的形式

式中的 $m=\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2+k^2}, \kappa=\frac{Rk}{m}, \beta_1=\frac{\beta}{2m}$，为取决于频率的常数，$B^2=\frac{g\beta}{k^2}$ 是 Richardson 常数，$\nu=\sqrt{\frac{1}{4}-B^2}$ 是一个取决于它的常数.

非齐次方程的解通过解 Grenn 函数由积分形式给出为

$$\hat{\chi}_i(\eta,t)=\int_0^t \frac{g_3(t_1+s_0)g_4(s)-g_3(s)g_4(t_1+s_0)}{\Delta(t_1+s_0)} \times \frac{\xi(t_1)}{\left[1+\kappa^2(t_1+s_0)^2\right]m^2}\mathrm{d}t_1$$

Laplace 变换与解

方程的解的形式

若解 χ 在无穷远处是有界的，则根据 $\hat{\chi} = \hat{\chi}_h + \hat{\chi}_i$ 的单值性，可以得出边界项 $\xi(t) = -\partial_{ytt}\chi(t;0)$ 满足的第一类 Volterra 积分方程

$$\int_{s_0}^{s} \frac{g_3(s_1)}{\Delta(s_1)\left(1+\kappa^2 s_1^2\right) m^2} \xi(s_1 - s_0) \mathrm{d}s_1 = \frac{g_3(s_0)}{\Delta(s_0)} \hat{\psi}_0(\eta) - \frac{g_3(s_0)}{\Delta(s_0)} \hat{\zeta}_0(\eta)$$

在 $s_0 = i\kappa^{-1} - t$ 处成立，等价于

Laplace 变换与解

方程的解的形式

$$\int_0^t K(t-t_1)\xi(t_1)\mathrm{d}t_1 = K_1(t)\hat{\psi}_0\left(-im(1+i\kappa t)\right) + K_2(t)\hat{\zeta}_0\left(-im(1+i\kappa t)\right),$$

K, K_1, K_2 均可由超几何函数显示表出.

这样, 就将解在频谱空间中显式地表达了出来. 下一步的任务就是对这个解给出 L^2 控制.

Laplace 变换与解

方程的解的形式

总结起来, 方程的解如下得到:

$$
\begin{aligned}
\psi &= e^{\frac{1}{2}\beta y}\chi, \\
\hat{\chi} &= \hat{\chi}_h + \hat{\chi}_i, \\
\hat{\chi}_h &= G_1(s, s_0)\hat{\psi}_0 + G_2(s, s_0)\hat{\zeta}_0, \\
\hat{\chi}_i &= G_3(s, s_0) * \xi, \\
\xi * K &= K_1\hat{\psi}_0 + K_2\hat{\zeta}_0.
\end{aligned}
$$

要解最后一个方程, 两边卷积上 K 的逆 K^{inv}. 得到

$$\xi = \left(K_1\hat{\psi}_0 + K_2\hat{\zeta}_0\right) * K^{inv}.$$

方程的解的控制

只需要控制各系数即可. 因为大家都有表达式, 所以可以得到渐近展开如下. 如果定理中(1)的条件满足, 则

$$
\begin{aligned}
|K^{inv}(t)| &\lesssim \langle t\rangle^{-\frac{5}{2}-\nu},\\
|K_1(t)| &\lesssim k^2 \langle t\rangle^{\frac{3}{2}+\nu},\\
|K_2(t)| &\lesssim k^2 \langle t\rangle^{\frac{5}{2}+\nu},
\end{aligned}
$$

否则 K^{inv} 有振荡的分量. 所以有

$$
\begin{aligned}
|\xi(t)| \lesssim\ & k^{\frac{3}{2}-\sigma} \langle t\rangle^{-\frac{1}{2}-\sigma} \left\|\psi_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})}\\
&+ k^{\frac{3}{2}-\sigma} \langle t\rangle^{\frac{1}{2}-\sigma} \left\|\zeta_0 e^{-my}\right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Laplace 变换与解

方程的解的控制

进一步得到

$$\hat{\chi}_i(t;\eta) \lesssim k^{\frac{3}{2}-\sigma} \langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \langle s_0\rangle^{\nu-\sigma+1} \left(\left\| \psi_0 e^{-my} \right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})} + \langle t\rangle \left\| \zeta_0 e^{-my} \right\|_{H^\sigma(\mathbb{R})} \right).$$

故

$$\|\chi_i\|_{L^2(\mathbb{R})} \lesssim \left(\left\| \psi_0 e^{-my} \right\|_{H^2(\mathbb{R})} + \left\| \zeta_0 e^{-my} \right\|_{H^3(\mathbb{R})} \right) \langle t\rangle^{-2+2\nu}.$$

这样就控制了非齐次项.

Laplace 变换与解

方程的解的控制

齐次项的控制使用如下引理.

对于 $g(t;x,y), h(x,y)$, 假设存在 $a>0$ 与 $b,c\in\mathbb{R}$ 满足

$$\left|\hat{g}(t;k,\eta)\right| \lesssim \langle s\rangle^{-a}\langle s_0\rangle^{b}|k|^{c}\left|\hat{h}(k,\eta)\right|,\ 0\neq k\in\mathbb{Z},\eta\in\mathbb{R},$$

那么

$$\left\|P_{\neq 0}g(t)\right\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})} \lesssim \langle t\rangle^{-a}\|h\|_{H_x^cH_y^{b+a}(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}.$$

Laplace 变换与解

方程的解的控制

由于对于齐次项我们有

$$\left|\hat{\chi}_h(t;\eta)\right| \lesssim \langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \langle s_0\rangle^{\frac{3}{2}+\nu} \left|\hat{\psi}_0(\eta)\right| + \langle s\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \langle s_0\rangle^{\frac{5}{2}+\nu} \left|\hat{\zeta}_0(\eta)\right|$$

因此

$$\|P_{\neq 0}\chi_h\|_{L^2} \lesssim \langle t\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu} \left(\|\psi_0\|_{L^2_x H^3_y(\mathbb{T}\times\mathbb{R})} + \|\zeta_0\|_{L^2_x H^4_y(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\right).$$

方程的解的控制

综合上面两个控制，我们得到流函数的控制

$$\|P_{\neq 0}\chi\|_{L^2} \lesssim \langle t\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu}\left(\|\psi_0\|_{L^2_x H^3_y(\mathbb{T}\times\mathbb{R})} + \|\zeta_0\|_{L^2_x H^4_y(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\right).$$

类似地得到速度场的控制

$$\left\|P_{\neq 0} e^{-\frac{1}{2}\beta y} v^x\right\|_{L^2} \lesssim \langle t\rangle^{-\frac{1}{2}+\nu}\left(\|\psi_0\|_{H^1_x H^2_y} + \|\zeta_0\|_{H^1_x H^3_y}\right),$$

$$\left\|e^{-\frac{1}{2}\beta y} v^y\right\|_{L^2} \lesssim \langle t\rangle^{-\frac{3}{2}+\nu}\left(\|\psi_0\|_{H^1_x H^3_y} + \|\zeta_0\|_{H^1_x H^4_y}\right).$$

这证明了定理(1). 定理(2)的证明由 K^{inv} 的形式类似得到.

Hamilton 结构

令

$$\Psi = e^{-\frac{1}{2}\beta y}\psi,$$

$$\Upsilon = e^{-\frac{1}{2}\beta y} T,$$

$$\Omega = \left(-\Delta + \frac{1}{4}\beta^2\right)\Psi = e^{-\frac{1}{2}\beta y}\left(\omega + \beta\psi_y\right).$$

则线性化方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\Omega \\ \Upsilon\end{pmatrix} = JL\begin{pmatrix}\Omega \\ \Upsilon\end{pmatrix}$$

Hamilton 系统与不变量

Hamilton 结构

$$L = \begin{pmatrix} \left(-\Delta + \frac{1}{4}\beta^2\right)^{-1} & -y \\ -y & B^2 + \beta y \end{pmatrix}$$

是一个自伴算子，

$$J = \partial_x \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

是一个反自伴算子.

这种形如 $\partial_t u = JLu$ 的系统有两个不变量.

Hamilton 结构

$$\partial_t u = JLu$$

其中 u 是 Hilbert 空间 X 中的元素, $L : X \to X^*$ 是一个有界线性算子, 并诱导 X 上的一个对称的二次型 $\langle L\cdot, \cdot\rangle$, $J : X^* \supset D(L) \to X$ 是一个反自伴算子.

如果 L 诱导的二次型 $\langle L\cdot, \cdot\rangle$ 只有有限多个负方向 $n^-(L)$, 那么可以得到零解的稳定性. 其中一个不变量就是这样构造的.

Hamilton 系统与不变量

不变量

两不变量其一是

$$
\begin{aligned}
H(\Omega, \Upsilon) &= \frac{1}{2}\left\langle L\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\right\rangle \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2_+} \frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2}{4}\Psi^2 + |\nabla\Psi|^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(B^2 + \beta y\right)\Upsilon^2 - y\Omega\Upsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

但是它有无数个负方向.

Hamilton 系统与不变量

不变量

其二是

$$P(\Omega,\Upsilon)=\frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Omega\\ \Upsilon\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$=\iint_{\mathbb{R}^2_+}\Omega\Upsilon-\frac{1}{2}\beta\Upsilon^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

但是它也有无数个负方向.

所以都不可以用来判别 Lyapunov 稳定性.

致谢

- 感谢李东升老师与林治武老师的悉心指导
- 感谢学校与学院给予此次访问的大力支持
- 感谢 NSF 的研究基金支持

谢谢观看！